No.

Date

3 $f(x)=x+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)$ とする。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき最大値

$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}+\frac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\pi}$ をとる。

解) (1) $f'(x)=1+\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\times\pi$ （⇐合成関数の微分）

$=1+2\cos(\pi x)$

$0\leqq x\leqq 1$ より $0\leqq \pi x\leqq \pi$ —— ①

であるから $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(\pi x)=-\frac{1}{2}$

$\pi x=\frac{2}{3}\pi$ （①より）

$x=\frac{2}{3}$ //
アイ

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)$ の増減表を書くと下図

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$f(0)=0$
$f(1)=1$

よって $f(x)$ は $x=\frac{2}{3}$ のとき極大かつ最大である

∴ 最大値 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ //
ウエオ

No.

Date

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における曲線 C の接線を l_t とする。

(i) $t=0$ のとき，直線 l_t の方程式は $y=\boxed{カ}x$ であり，$t=1$ のとき，直線 l_t の方程式は $y=-x+\boxed{キ}$ である。

(ii) $0 \leqq t \leqq 1$ において，直線 l_t の y 切片は

$t=\boxed{ク}$ のとき最小値 $\boxed{ケ}$ をとり，

$t=\boxed{コ}$ のとき最大値 $\boxed{サ}$ をとる。

(iii) $0<t<1$ とし，曲線 C の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分，直線 l_t，直線 $x=0$，および，直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を S_t とする。

S_t は $t=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{セ}}{\pi}-\dfrac{\boxed{ソ}}{\pi^2}$ をとる。

解) (2) $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

l_t : $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ ——②

とおける

$\therefore$ ② $\iff y=\{1+2\cos(\pi t)\}(x-t)+t+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$

$\iff y=\{1+2\cos(\pi t)\}x-t-2t\cos(\pi t)+t+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$

$\iff y=\{1+2\cos(\pi t)\}x-2t\cos(\pi t)+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$ —③

(i) $t=0$ を③に代入して $y=\{1+2\cos 0\}x-2\times 0\times\cos 0+\frac{2}{\pi}\sin 0$

$\underline{y=3x}_{\,カ}$

$t=1$ を③に代入して $y=\{1+2\cos(\pi)\}x-2\times 1\times\cos(\pi)+\frac{2}{\pi}\sin(\pi)$

$\underline{y=-x+2}_{\,キ}$

No.

Date

(ii) l_t の y 切片は ③ より $-2t\cos(\pi t)+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$

である $g(t)=-2t\cos(\pi t)+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$

とおく

$$g'(t)=-2\{1\times\cos(\pi t)+t\times(-\sin(\pi t)\times\pi)\}+\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)\times\pi$$

$$=-2(\cos(\pi t)-\pi t\sin(\pi t))+2\cos(\pi t)$$

$$=2\pi t\sin(\pi t)$$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき $g'(t)\geqq 0$ だから $g(t)$ は単調増加である

よって $t=0$ のとき 最小値 $g(0)=0$ // クケ

$t=1$ のとき 最大値 $g(1)=2$ // コサ

(iii) $f(x)=x+\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)$

$f'(x)=1+2\cos(\pi x)$

$f''(x)=-2\pi\sin(\pi x)$

$0<x<1$ のとき $f''(x)<0$ であるから

$y=f(x)$ は $0<x<1$ の範囲で上に凸である

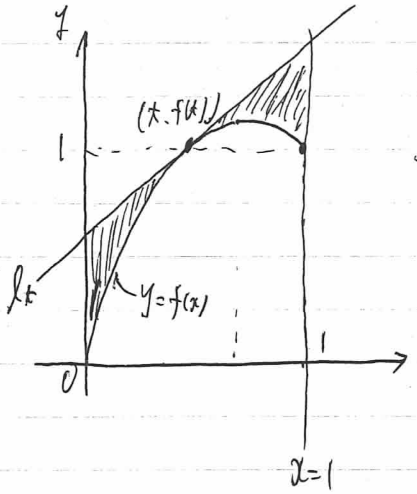
したがって $0<x<1$ の範囲で 曲線 C は 接線 l_t の下側にあるから

(図参照)

S_t は図の斜線部分となる

No.

Date



よって

$$S_t = \int_0^1 \Big[\underbrace{\{1+2\cos(\pi t)\}x - 2t\cos(\pi t) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)}_{l_t} - \Big(\underbrace{x + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x)}_{f(x)}\Big) \Big] dx$$

$$= \int_0^1 \left(2\cos(\pi t)\cdot x - \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) - 2t\cos(\pi t) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) \right) dx$$

$$= \left[\cos(\pi t)\cdot x^2 + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) - 2t\cos(\pi t)\cdot x + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)\cdot x \right]_0^1$$

$$= \cos(\pi t) + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi) - 2t\cos(\pi t) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) - \left(\frac{2}{\pi^2}\cos 0\right)$$

$$= \cos(\pi t) - 2t\cos(\pi t) + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{4}{\pi^2} \quad \text{―― ③}$$

③をtで微分して

$$\frac{dS_t}{dt} = -\pi\sin(\pi t) - 2\left(1\times\cos(\pi t) + t\times(-\sin(\pi t)\times\pi)\right) + \frac{2}{\pi}\cos(\pi t)\times\pi$$

$$= -\pi\sin(\pi t) - 2\cos(\pi t) + 2\pi t\sin(\pi t) + 2\cos(\pi t)$$

$$= (2t-1)\pi\sin(\pi t)$$

$0<t<1$ で $\frac{dS_t}{dt}=0$ をみたす t は $t=\frac{1}{2}$

S_t の増減表は下表のようになる

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{dS_t}{dt}$		−	0	+	
S_t		↘	極小	↗	

よって S_t は $t=\frac{1}{2}$ のとき極小かつ最小となる

最小値は③に $t=\frac{1}{2}$ を代入して $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\times\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$