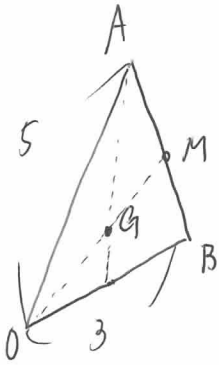


6 O を原点とする座標平面上に、 $|\vec{OA}| = 5$ 、 $|\vec{OB}| = 3$ を満たす $\triangle OAB$ がある。

$\triangle OAB$ の重心の座標が $(2, \sqrt{2})$ のとき、内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の値は シス であり、

$\triangle OAB$ の面積は セ $\sqrt{\text{ソ}}$ タ である。



重心 G と M

AB の中点 M と G $OG:GM = 2:1$ より

$$\vec{OM} = \frac{3}{2} \vec{OG}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$\vec{OM} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \therefore M \left(3, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$A(a, b)$ 、 $B(c, d)$ とおく

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ より } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = ac + bd \quad \text{--- ①}$$

AB の中点 M より

$$\frac{a+c}{2} = 3, \quad \frac{b+d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a+c=6, \quad b+d=3\sqrt{2} \quad \text{--- ②}$$

$$2|\vec{OA}|=5, \quad |\vec{OB}|=3 \text{ より } a^2+b^2=25, \quad c^2+d^2=9 \quad \text{--- ③}$$

これより

$$\text{②より } (a+c)^2 + (b+d)^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd) = 54$$

$$\text{③より } 25+9+2(ac+bd) = 54$$

$$ac+bd = 10$$

$$\text{①より } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{25 \times 9 - 10^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2}$$