No.

Date

2017 川崎医科

1 θ を実数とし，i を虚数単位とする。

（1） A，B を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 3\theta = \sin\theta\cdot(A - B\sin^2\theta)$$

が成り立つとする。

（i） $A = \boxed{ア}$，$B = \boxed{イ}$ である。

（ii） $\frac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ とし，3 次方程式 $Ax - Bx^3 = \frac{1}{2}$ の最も小さい解が $\sin\theta$ に等しいとき，$\theta = \frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}\pi$ である。

解）(i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ （加法定理）

より $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta)$

$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (\cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \{(1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta\}\cdot\sin\theta$ $(\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta)$

$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + (1-2\sin^2\theta)\cdot\sin\theta$

$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\therefore \sin 3\theta = \sin\theta(3-4\sin^2\theta)$ $A=3$. $B=4$ // ア.イ

注 3倍角の公式

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

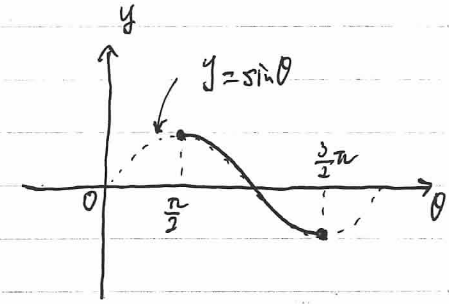
$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

(ii) $Ax-Bx^3=\frac{1}{2}$ の最も小さい解が $\sin\theta$ に等しい

つまり $3x-4x^3=\frac{1}{2}$ の最も小さい解が $\sin\theta$ に等しい

よって $3\sin\theta-4\sin^3\theta=\frac{1}{2}$ ―――― ①

をみたす最小の $\sin\theta$ を求める $\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ のとき.



$\sin\theta$ は減少関数だから

$\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ の範囲で $\sin\theta$ が最も小さい

$\Updownarrow$

θ は $\frac{3}{2}\pi$ 以下の最大の値

ということになる.

(i) より $3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$ だから

① $\Leftrightarrow$ $\sin 3\theta=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ より $\frac{3}{2}\pi\leqq 3\theta\leqq\frac{9}{2}\pi$

つまり $\sin 3\theta=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\pi\leqq 3\theta\leqq\frac{9}{2}\pi\right)$ を解いて、θ とできるかぎり $\frac{3}{2}\pi$ 以下の最大の値をもとめればよい.

$$\sin 3\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2n\pi & (n:\text{整数})\\ \frac{5}{6}\pi+2m\pi & (m:\text{整数})\end{cases}$$

$\frac{3}{2}\pi\leqq 3\theta\leqq\frac{9}{2}\pi$ より
$$3\theta=\begin{cases}\frac{13}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi\\ \frac{17}{6}\pi\end{cases}$$

となり
$$\theta=\begin{cases}\frac{13}{18}\pi,\ \frac{25}{18}\pi\\ \frac{17}{18}\pi\end{cases}$$

であるから 求める θ の値は $\underline{\theta=\frac{25}{18}\pi}$ となる.

ウ.エ.オカ

No.

Date

（2） a，b，c を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 5\theta = \sin\theta \cdot f(\sin^2\theta)$$

を満たす2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

（i） 複素数 $\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5$ の虚部の値は $\boxed{キ}$ である。

（ii） α，β を実数とするとき，複素数 $(\alpha + i\beta)^5$ の虚部は

$\boxed{ク}\,\alpha^4\beta - \boxed{ケコ}\,\alpha^2\beta^3 + \beta^5$

に等しい。

（iii） $a = \boxed{サシ}$，$b = -\boxed{スセ}$，$c = \boxed{ソ}$ である。

（iv） 2次方程式 $f(x) = 0$ の解 x は

$$x = \frac{\boxed{タ} - \sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}} \quad と \quad x = \frac{\boxed{タ} + \sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

である。ここで，2つの $\boxed{タ}$，2つの $\boxed{チ}$，2つの $\boxed{ツ}$ は，それぞれ，同じ値である。

（v） $\cos\frac{2}{5}\pi = \dfrac{-\boxed{テ}\ \boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}$ である。

ただし，$\boxed{ト}$ は，符号＋，－のいずれかである。

解）(2) (i) ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

より

$$\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$$= 1 + 0i$$

$$= 1$$

よって虚部の値は $\underline{0}$ $_{//キ}$

(ii) $(\alpha+i\beta)^5$

$= \alpha^5 + \underline{5}\cdot\alpha^4 i\beta + \underline{10}\alpha^3(i\beta)^2 + \underline{10}\alpha^2(i\beta)^3 + \underline{5}\alpha(i\beta)^4 + (i\beta)^5$ ⇐

$= \alpha^5 + 5\alpha^4\beta i - 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 i + 5\alpha\beta^4 + \beta^5 i \quad [i^2=-1]$

$= \alpha^5 - 10\alpha^3\beta^2 + 5\alpha\beta^4 + \underline{(5\alpha^4\beta - 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5)}\, i$
ク.ケコ

パスカルの三角形

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$(a+b)^5$の係数

(iii) $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ とおくと

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos5\theta + i\sin5\theta$ —— ①

又(ii)より

$(\alpha+i\beta)^5 = \alpha^5 - 10\alpha^3\beta^2 + 5\alpha\beta^4 + (5\alpha^4\beta - 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5)i$

より

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
$+ (5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)i$ —— ②

①と②の虚部は等しいから

$\sin5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$
$= \sin\theta(5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta)$
$= \sin\theta\{5(1-\sin^2\theta)^2 - 10(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \sin^4\theta\}$

$\therefore f(\sin^2\theta) = 5(1-\sin^2\theta)^2 - 10(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \sin^4\theta$ となる

$\sin^2\theta = x$ とおいて

$f(x) = 5(1-x)^2 - 10(1-x)\cdot x + x^2$
$= 5(1-2x+x^2) - 10x + 10x^2 + x^2$
$= \underline{16x^2 - 20x + 5}$
サシ,スセ,ソ

No.

Date

(iv) $f(x)=0$

$\Leftrightarrow 16x^2-20x+5=0$

解の公式より $x=\dfrac{10\pm\sqrt{10^2-80}}{16}$

$=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

タ・チ・ツ

(v) $(\cos\theta+i\sin\theta)^5$ の虚部は $\sin\theta\cdot f(\sin^2\theta)$ で表され

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき虚部の値は 0 だから [(i)より]

$\sin\frac{2}{5}\pi\cdot f\left(\sin^2\frac{2}{5}\pi\right)=0$

$\sin\frac{2}{5}\pi\neq0$ より $f\left(\sin^2\frac{2}{5}\pi\right)=0$

ここで $x=\sin^2\frac{2}{5}\pi$ とおくと $f(x)=0$

(iv) より $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

だから $\sin^2\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

ここで $\frac{\pi}{4}<\frac{2}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$ だから $\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{2}{5}\pi$

つまり $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{2}{5}\pi$

から $\frac{1}{2}<\sin^2\frac{2}{5}\pi$

である

よって $\sin^2\frac{2}{5}\pi = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$ であり

$$\cos^2\frac{2}{5}\pi + \sin^2\frac{2}{5}\pi = 1$$

から $\cos^2\frac{2}{5}\pi = 1 - \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

$\cos\frac{2}{5}\pi > 0$ だから $\cos\frac{2}{5}\pi = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$

$$= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

テトナニ

2重根号をはずす

$a > b$ のとき

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

より

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

(今の場合 $a=5$. $b=1$)

No.

Date

(3) p, q, r, s を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 7\theta = \sin\theta \cdot g(\sin^2\theta)$$

を満たす3次関数 $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ を考える。

(i) $p = -\boxed{\text{ヌネ}}$，$q = \boxed{\text{ノハヒ}}$，$r = -\boxed{\text{フヘ}}$，$s = \boxed{\text{ホ}}$ である。

(ii) $\sin\dfrac{2}{7}\pi \cdot \sin\dfrac{4}{7}\pi \cdot \sin\dfrac{6}{7}\pi = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ が成り立つ。

解) (2)と同様にすすめる

ド・モアブルの定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta \quad \text{—— ①}$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

又 $(\alpha + i\beta)^7 = \alpha^7 + 7\alpha^6 i\beta + 21\alpha^5(i\beta)^2 + 35\alpha^4(i\beta)^3 + 35\alpha^3(i\beta)^4 + 21\alpha^2(i\beta)^5 + 7\alpha(i\beta)^6 + (i\beta)^7$

$$= (\alpha^7 - 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^3\beta^4 - 7\alpha\beta^6)$$
$$+ i(7\alpha^6\beta - 35\alpha^4\beta^3 + 21\alpha^2\beta^5 - \beta^7)$$

ここで $\alpha = \cos\theta$. $\beta = \sin\theta$ として虚部は次のようになる

$$7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta$$

$$= \sin\theta\{7(1-\sin^2\theta)^3 - 35(1-\sin^2\theta)^2\sin^2\theta + 21(1-\sin^2\theta)\cdot\sin^4\theta - \sin^6\theta\} \quad \text{—— ②}$$

①. ②と $\sin 7\theta = \sin\theta \cdot g(\sin^2\theta)$

から $g(\sin^2\theta) = 7(1-\sin^2\theta)^3 - 35(1-\sin^2\theta)^2\sin^2\theta + 21(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta - \sin^6\theta$

ここで $x = \sin^2\theta$ とおくと

$$g(x) = 7(1-x)^3 - 35(1-x)^2\cdot x + 21(1-x)\cdot x^2 - x^3$$
$$= 7(1-3x+3x^2-x^3) - 35(x-2x^2+x^3) + 21x^2 - 21x^3 - x^3$$
$$= \underbrace{-64x^3 + 111x^2 - 56x + 7}_{\text{ヌネノハヒフヘホ}}$$

(ii) $\sin 7\theta = \sin\theta \cdot g(\sin^2\theta)$

に $\theta = \frac{2}{7}\pi,\ \frac{4}{7}\pi,\ \frac{6}{7}\pi$ をそれぞれ代入して $\sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = 0$ から

$\sin\frac{2}{7}\pi \cdot g\left(\sin^2\frac{2}{7}\pi\right) = 0$

$\sin\frac{4}{7}\pi \cdot g\left(\sin^2\frac{4}{7}\pi\right) = 0$

$\sin\frac{6}{7}\pi \cdot g\left(\sin^2\frac{6}{7}\pi\right) = 0$

ここで $\sin\frac{2}{7}\pi \neq 0$. $\sin\frac{4}{7}\pi \neq 0$. $\sin\frac{6}{7}\pi \neq 0$

から
$$\left.\begin{array}{l} g\left(\sin^2\frac{2}{7}\pi\right) = 0 \\ g\left(\sin^2\frac{4}{7}\pi\right) = 0 \\ g\left(\sin^2\frac{6}{7}\pi\right) = 0 \end{array}\right\} \text{—— ②}$$

$g(x) = -64x^3 + 112x^2 - 56x + 7$

であるから
$g(x) = 0$

の解は ② より $x = \sin^2\frac{2}{7}\pi.\ \sin^2\frac{4}{7}\pi.\ \sin^2\frac{6}{7}\pi$

であり $\sin^2\frac{2}{7}\pi.\ \sin^2\frac{4}{7}\pi.\ \sin^2\frac{6}{7}\pi$ はそれぞれ異なるから

$g(x) = 0$ つまり $-64x^3 + 112x^2 - 56x + 7 = 0$ の異なる3つの解が

$x = \sin^2\frac{2}{7}\pi.\ \sin^2\frac{4}{7}\pi.\ \sin^2\frac{6}{7}\pi$

である. 解と係数の関係より ※

$\sin^2\frac{2}{7}\pi \cdot \sin^2\frac{4}{7}\pi \cdot \sin^2\frac{6}{7}\pi = -\frac{7}{-64}$

$\left(\sin\frac{2}{7}\pi \cdot \sin\frac{4}{7}\pi \cdot \sin\frac{6}{7}\pi\right)^2 = \frac{7}{64}$

$\sin\frac{2}{7}\pi > 0.\ \sin\frac{4}{7}\pi > 0.\ \sin\frac{6}{7}\pi > 0$ だから

$\sin\frac{2}{7}\pi \cdot \sin\frac{4}{7}\pi \cdot \sin\frac{6}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{8}$ //

※
3次方程式
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
の3つの解を α, β, γ とおくと

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

が成り立つ