

9 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が,

$$a_1 = \frac{2}{3}, b_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{3} - \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n + 4b_n}{3} + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定められている。このとき、数列 $\{2a_n + b_n\}$ は公比 $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$ の等比数列であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - n) = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{ より } \quad 2a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n - 1 \\ +) \quad b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{4}{3}b_n + 1 \\ \hline 2a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{4}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \\ &= \frac{2}{3}(2a_n + b_n) \end{aligned}$$

よって 数列 $\{2a_n + b_n\}$ は 初項 $2a_1 + b_1 = 2 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$
公比 $\frac{2}{3}$

等比数列より

$$2a_n + b_n = \frac{19}{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{--- ①}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} +) \quad b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{4}{3}b_n + 1 \\ \hline a_{n+1} + b_{n+1} &= a_n + b_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって 数列 $\{a_n + b_n\}$ は 初項 $a_1 + b_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$
公差 $\frac{1}{2}$

等差数列より

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \frac{11}{12} + (n-1) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}n + \frac{5}{12} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 \text{ より } \quad 2a_n + b_n &= \frac{19}{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ -) \quad 2a_n + 2b_n &= n + \frac{5}{6} \\ \hline -b_n &= \frac{19}{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - n - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$b_n - n = \frac{5}{6} - \frac{19}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

lim? ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - n) = \frac{5}{6}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ である}$$