

- 10 a, b, c, d, e はそれぞれ 1 以上かつ 9 以下の自然数であり、 $(a+b+c)(d+e)=104$ を満たす。このとき、 $a \leq b \leq c$ および $d \leq e$ を満たす (a, b, c, d, e) の組は チツ 通りある。また、 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ を満たす (a, b, c, d, e) の組は テト 通りある。

$$104 = 2^3 \times 13$$

$$3 \leq a+b+c \leq 27 \quad 2 \leq d+e \leq 18$$

でわめろ

$$(a+b+c)(d+e) = 2^3 \times 13$$

それらの組合せは

$$(a+b+c, d+e) = (8, 13), (13, 8), (26, 4) \text{ の 3 通りでわめろ}$$

$$(i) \begin{cases} a+b+c=8 \\ d+e=13 \end{cases} \text{ かつ } (a, b, c) = (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3) \text{ の 5 通り}$$

$$(d, e) = (4, 9), (5, 8), (6, 7) \text{ の 3 通り}$$

$$\text{よって } 5 \times 3 = 15 \text{ (通り)}$$

$$(ii) \begin{cases} a+b+c=13 \\ d+e=8 \end{cases} \text{ かつ } (a, b, c) = (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 5, 7), (1, 6, 6), (2, 2, 9), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 5, 6), (3, 3, 7), (3, 4, 6), (3, 5, 5), (4, 4, 5) \text{ の 12 通り}$$

$$(d, e) = (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4) \text{ の 4 通り}$$

$$\text{よって } 12 \times 4 = 48 \text{ (通り)}$$

$$(iii) \begin{cases} a+b+c=26 \\ d+e=4 \end{cases} \text{ かつ } (a, b, c) = (8, 9, 9) \text{ の 1 通り}$$

$$(d, e) = (1, 3), (2, 2) \text{ の 2 通り}$$

$$\text{よって } 1 \times 2 = 2 \text{ (通り)}$$

$$\text{以上 (i) (ii) (iii) より } 15 + 48 + 2 = 65 \text{ (通り)}$$

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ となるのは (前半の条件を排他法で数え上げる)

$$(a, b, c) = (1, 1, 6) \text{ のとき } (d, e) = (6, 7) \text{ が } 1 \text{ 通り}$$

$$(1, 2, 5) \text{ のとき } (d, e) = \begin{matrix} (5, 8) \\ (6, 7) \end{matrix} \text{ が } 2 \text{ 通り}$$

$$(1, 3, 4) \text{ のとき } (d, e) = \begin{matrix} (4, 9) \\ (5, 8) \\ (6, 7) \end{matrix} \text{ が } 3 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 4) \text{ のとき } (d, e) = \begin{matrix} (4, 9) \\ (5, 8) \\ (6, 7) \end{matrix} \text{ が } 3 \text{ 通り}$$

$$(2, 3, 3) \text{ のとき } (d, e) = \begin{matrix} (4, 9) \\ (5, 8) \\ (6, 7) \end{matrix} \text{ が } 3 \text{ 通り}$$

$$\text{よって } 1 + 2 + 3 + 3 + 3 = 12 \text{ (通り)}$$

71