No.

Date

2 θ を実数とし，i を虚数単位とする。

(1) 複素数平面において，複素数 z が $2+\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ の円周上にあるとし，$w=\frac{1}{z}$ とおく。

(i) $\left|2+\frac{3}{2}i\right|=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(ii) $\left|w-\frac{\boxed{ウ}-\boxed{エ}i}{\boxed{オカ}}\right|=\sqrt{2}\,|w|$ が成り立つ。

(iii) w は中心 $-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}+\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}i$，半径 $\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\sqrt{2}$ の円周上にある。

解）(i) $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

より

$$\left|2+\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4+\frac{9}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$=\frac{5}{2}$$

ア.イ

(ii) $\alpha=2+\frac{3}{2}i$ とおくと (i) より $|\alpha|=\frac{5}{2}$

複素数 z は $\alpha\left(=2+\frac{3}{2}i\right)$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ の

円周上にあるから

$$|z-\alpha|=\frac{5}{2}\sqrt{2} \quad \text{——} ①$$

が成り立つ

No.

Date

$w=\frac{1}{z}$ より $z=\frac{1}{w}$ を ①へ代入して

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=\frac{5}{2}\sqrt{2} \quad —— ②$$

となり w は②をみたす図形上にある

$$② \Leftrightarrow |\alpha|\left|\frac{1}{\alpha w}-1\right|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\left|\frac{1}{\alpha w}-1\right|=\frac{5}{2}\sqrt{2} \quad \left(|\alpha|=\frac{5}{2} \text{ より}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha w}-1\right|=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\alpha}-w\right|=\sqrt{2}|w| \quad (\text{両辺に } |w| \text{ をかけた})$$

$$\Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\sqrt{2}|w| \quad (|a-b|=|b-a| \text{ より}) \quad —— ②'$$

ここで $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2+\frac{3}{2}i}=\frac{2}{4+3i}=\frac{2(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$$=\frac{8-6i}{16-9i^2}=\frac{8-6i}{25}$$

より

$$②' \Leftrightarrow \underbrace{\left|w-\frac{8-6i}{25}\right|=\sqrt{2}|w|}_{ウエオカ} \quad —— ③$$

(iii) $\beta=\frac{1}{\alpha}$ とおくと (ii) から $\beta=\frac{8-6i}{25}$ であり $|\beta|=\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$ である

(注) 直接計算しても良い
$|\beta|=\left|\frac{8-6i}{25}\right|$
$=\frac{1}{25}\sqrt{8^2+(-6)^2}$
$=\frac{1}{25}\times\sqrt{100}$
$=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$

$$① \Leftrightarrow |w-\beta|=\sqrt{2}|w|$$

両辺2乗して $|w-\beta|^2=(\sqrt{2})^2|w|^2$

$$\Leftrightarrow (w-\beta)(\overline{w-\beta})=2w\overline{w} \quad (|z|^2=z\overline{z})$$

$$\Leftrightarrow (w-\beta)(\overline{w}-\overline{\beta})=2w\overline{w}$$

$$\Leftrightarrow w\overline{w}-w\overline{\beta}-\overline{w}\beta+\beta\overline{\beta}=2w\overline{w}$$

No.

Date

$\Leftrightarrow\ -w\bar{w}-w\bar{\beta}-\bar{w}\beta+\beta\bar{\beta}=0$

$\Leftrightarrow\ w\bar{w}+w\bar{\beta}+\bar{w}\beta-\beta\bar{\beta}=0$

$\Leftrightarrow\ (w+\beta)(\bar{w}+\bar{\beta})-\beta\bar{\beta}-\beta\bar{\beta}=0$

$\Leftrightarrow\ (w+\beta)\overline{(w+\beta)}=2\beta\bar{\beta}$

$\Leftrightarrow\ |w+\beta|^2=2|\beta|^2$

$\Leftrightarrow\ |w+\beta|=\sqrt{2}|\beta|$

$\Leftrightarrow\ \left|w+\frac{8-6i}{25}\right|=\sqrt{2}\times\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow\ \left|w+\frac{8-6i}{25}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

よって wは 中心 $-\frac{8-6i}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$ キクケコサシ

半径 $\frac{2}{5}\sqrt{2}$ スセ

の円周上にある.

No.

Date

(2) 複素数平面において

$$z_A = \cos\theta + i\sin\theta,\ z_B = \cos 2\theta + i\sin 2\theta,\ z_C = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

とし，複素数 z_A，z_B，z_C の表す点を，それぞれ，A，B，C とする。

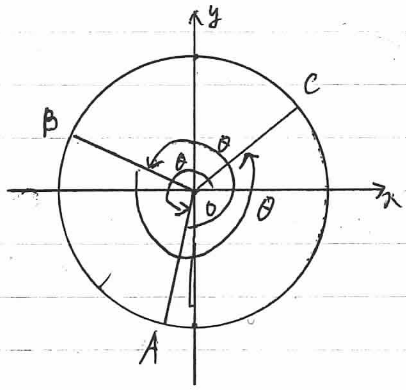
(i) $\pi < \theta < 2\pi$ とする。3 点 A，B，C を頂点とする三角形が正三角形

となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi$ のときであり，直角三角形になるのは

$\theta = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$ のときである。

解) (2) (i)

$\pi < \theta < 2\pi$ に注意すると



$\angle AOB = 2\pi - \theta$

$\angle BOC = 2\pi - \theta$

$\angle COA = \begin{cases} 2\theta - 2\pi & (\pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi)\ 注 \\ 4\pi - 2\theta & (\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi)\ 注 \end{cases}$

注 $\angle COA = 3\theta - \theta = 2\theta$ となるが $\pi < \theta < 2\pi$ より $2\pi < 2\theta < 4\pi$ となるので

$2\pi < 2\theta \leq 3\pi$ つまり $\pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ のとき $\angle COA = 2\theta - 2\pi$

$3\pi < 2\theta < 4\pi$ つまり $\frac{3}{2}\pi < \theta < \pi$ のとき $\angle COA = 4\pi - 2\theta$

なぜこのようにするかというと，$\angle COA$ を鋭角で表すためです

$\triangle ABC$ が正三角形 $\iff \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2}{3}\pi$

$2\pi - \theta = \frac{2}{3}\pi$ より $\theta = \frac{4}{3}\pi$

このとき $2\theta - 2\pi = \frac{8}{3}\pi - 2\pi = \frac{2}{3}\pi$ より 適する $\therefore \underline{\theta = \frac{4}{3}\pi}$ ソタ

$\triangle ABC$ が直角三角形 $\iff \angle AOB,\ \angle BOC,\ \angle COA$ のいずれか1つが π

$0 < 2\pi - \theta < \pi$ より $\angle COA$ が π となるしかない．$2\theta - 2\pi = \pi$ より $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ($\pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ より適する)

$4\pi - 2\theta = \pi$ より $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ($\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ より不適) $\therefore \underline{\theta = \frac{3}{2}\pi}$ チツ

No.

Date

(ii)　$0<\theta<\pi$ とする。3 点 A，B，C を頂点とする三角形の面積を S とするとき，

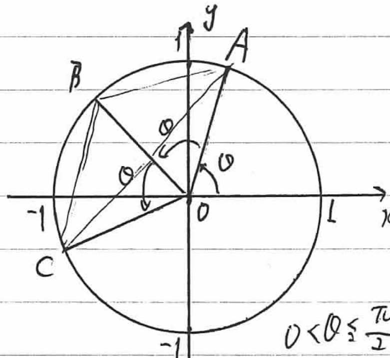
$$S=\sin\theta\ \boxed{\text{テ}}\ \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sin 2\theta$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ は符号＋，－のいずれかである。

S が最大となるのは　$\theta=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi$　のときである。

このとき S の最大値は　$\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$　である。

解) (ii) $0<\theta<\pi$ に注意すると



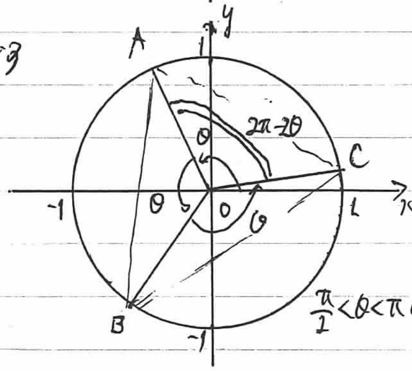
$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$\angle AOB=\theta$

$\angle BOC=\theta$

$\angle COA=\begin{cases}2\theta & (0<\theta\leqq\frac{\pi}{2})\\ 2\pi-2\theta & (\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)\end{cases}$ (図参照)

(i)と同じ考え方です



$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

(ア) $0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC-\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin2\theta$

$=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$

(イ) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(2\pi-2\theta)$

$=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$

$=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$　以上 (ア), (イ) より $S=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$

テトナ

No.

Date

$$\frac{dS}{d\theta} = \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \times 2$$

$$= \cos\theta - \cos 2\theta$$

$$= \cos\theta - (2\cos^2\theta - 1)$$

$$= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$$

$$= -(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1)$$

$$= -(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)$$

$\frac{dS}{d\theta} = 0 \iff \cos\theta = -\frac{1}{2}, 1$

$0 < \theta < \pi$ より $\theta = \frac{2}{3}\pi$

よって 増減表は次のとおり

θ	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

S は $\theta = \underline{\frac{2}{3}\pi}$ のとき 極大かつ 最大

二叉

このときの 値は $\sin\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\pi$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

ネノハ

No.

Date

(iii) $\theta=1$ とし，m，n を整数とする。m，n が $\arg(z_A)=\arg\left(\frac{z_B^m}{z_C^n}\right)$ を満たすとき，m，n は，整数 k を用いて

$$m=2+\boxed{\text{ヒ}}\,k,\qquad n=\boxed{\text{フ}}+\boxed{\text{ヘ}}\,k$$

と表せる。このうち，m，n が共に 50 以上，150 以下を満たす m，n の組は $\boxed{\text{ホマ}}$ 組ある。

解） $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき $\arg(z)=\theta$

又 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\arg(z_2)-\arg(z_1)$ が成り立つので

$\theta=1$ のとき

$z_A=\cos 1+i\sin 1$

$z_B=\cos 2+i\sin 2$ $\quad z_B^m=\cos 2m+i\sin 2m$ （ド・モアブルの定理）

$z_C=\cos 3+i\sin 3$ $\quad z_C^n=\cos 3n+i\sin 3n$ （ 〃 ）

から $\arg(z_A)=\arg\left(\frac{z_B^m}{z_C^n}\right)$

$\arg(z_A)=\arg(z_B^m)-\arg(z_C^n)$

$1=2m-3n$

よって m.n が整数のときの

$2m-3n=1$ —— ①

をみたす整数解の組を求める問題となります。

No.

Date

$2\times2-3\times1=1$ ―② であるから

①−② より
$$\begin{array}{r} 2m-3n=1 \\ -)\ 2\times2-3\times1=1 \\ \hline 2(m-2)-3(n-1)=0 \end{array}$$

⇐ 2元1次不定方程式の解き方は 1組の解をみつけて引くことにより求めることができます。

$$2(m-2)=3(n-1)$$

2と3は互いに素であるから、整数 k を用いて

$m-2=3k$

$n-1=2k$

とおける

$\therefore\ m=2+3k,\ n=1+2k$

ヒフへ

$50\leqq m\leqq150$ かつ $50\leqq n\leqq150$

をみたす整数 k の個数を求める

$50\leqq m\leqq150$

$\Leftrightarrow\ 50\leqq2+3k\leqq150$

$\Leftrightarrow\ 48\leqq3k\leqq148$

$\Leftrightarrow\ 16\leqq k\leqq49\frac{1}{3}$ ―③

$50\leqq n\leqq150$

$\Leftrightarrow\ 50\leqq1+2k\leqq150$

$\Leftrightarrow\ 49\leqq2k\leqq149$

$\Leftrightarrow\ 24\frac{1}{2}\leqq k\leqq74\frac{1}{2}$ ―④

k は整数より ③かつ④から

$25\leqq k\leqq49$

よって 25組 ある

ホマ