

1

問1 3辺の長さがすべて自然数で、最も短い辺の長さが素数 p である直角三角形を考える。 $p = 13$ のとき 3 辺の長さの和は (1) (2) (3) である。また、この三角形の面積が 1710 のとき $p =$ (4) (5) である。

問2 $\pi^x = 10^5$, $(100\pi)^y = 10^5$ であるとき、

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{(6)}{(7)}$$

である。

問3 極限值 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5n-8k}{n^2+k^2}$ を考える。定積分 $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, $K = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

を用いて I を表すと、

$$I = (8) J - (9) K$$

となる。 J と K の値を求めて代入すると、

$$I = \frac{(10)}{(11)} \pi - (12) \log (13)$$

が得られる。

問4 2 次方程式 $x^2 - ax + (a^2 - 6a - 1) = 0$ の 2 つの解がともに整数となるような定数 a の値を全て加えると (14) (15) となる。

解) 問1



図の如く、最も長い辺と2番目に長い辺を r, q

と置く ($p < q < r$)

∴ 勾股定理より $r^2 = q^2 + p^2$

$$\sqrt{q^2 + p^2}$$

$$r = \sqrt{q^2 + p^2}$$

が成り立つ。両辺を2乗し

$$r^2 = q^2 + p^2 \quad \text{--- ①}$$

が成り立つ

$p = 13$ のとき ① に代入し

$$r^2 = q^2 + 13^2$$

$$r^2 - q^2 = 13^2$$

$$(r-q)(r+q) = 13^2 \quad \text{--- ②}$$

∴ q, r は自然数であるから

② を q, r の組として

$$\begin{cases} r-q=1 \\ r+q=13^2 \end{cases}$$

$$\text{よって } q=84, r=85$$

面積は

$$\therefore p+q+r = 13+84+85$$

$$= 182$$

(1), (2), (3)

$$1710 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 19$$

$$\therefore \frac{1}{2} pq = 1710$$

$$\Leftrightarrow pq = 2 \times 3^2 \times 5 \times 19 \quad \text{--- ③}$$

$$\therefore \text{①より } r^2 - q^2 = p^2$$

$$(r-q)(r+q) = p^2 \quad \text{--- ④}$$

p は素数だから ④ を q, r の組として

$$\begin{cases} r-q=1 \\ r+q=p^2 \end{cases}$$

$$\text{よって } q = \frac{p^2-1}{2}, r = \frac{p^2+1}{2}$$

$$\text{③ に代入して } p \times \frac{p^2-1}{2} = 2 \times 3^2 \times 5 \times 19$$

$$p(p-1)(p+1) = 2 \times 3^2 \times 5 \times 19 \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{⑤ を素数 } p \text{ として } p=19 \text{ である}$$

(4), (5)

問2 $\pi^x = 10^5$ $(100\pi)^y = 10^5$

底が10の対数に2を3を

$$\log_{10} \pi^x = \log_{10} 10^5 \quad \log_{10} (100\pi)^y = \log_{10} 10^5$$

$$x \log_{10} \pi = 5 \quad y (\log_{10} 100 + \log_{10} \pi) = 5$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\log_{10} \pi}{5} \quad \frac{1}{y} = \frac{2 + \log_{10} \pi}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{\log_{10} \pi}{5} - \frac{2 + \log_{10} \pi}{5}$$

$$= -\frac{2}{5}$$

(6), (7)

問3

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5n - 8k}{n^2 + k^2}$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5n - 8k}{n + \frac{k^2}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5 - 8 \cdot \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{5 - 8x}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{5}{1 + x^2} dx - \int_0^1 \frac{8x}{1 + x^2} dx$$

$$= 5 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx - 8 \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$= 5J - 8K \quad \text{--- (1)}$$

(8), (9)

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$x = \tan \theta \text{ とおくと } \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\therefore J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \text{--- (10)} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$K = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} [\log |1 + x^2|]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (\log |2| - \log |1|)$$

$$= \frac{1}{2} \log 2$$

①に代入して

$$I = 5 \times \frac{\pi}{4} - 8 \times \frac{1}{2} \log 2$$

$$= \frac{5\pi}{4} - 4 \log 2$$

(10), (11), (12), (13)

問4 $x^2 - ax + (a^2 - 6a - 1) = 0$ (もとスタートに解く方法もあってもいい)

$$\text{解の公式より } x = \frac{a \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{ただし } D = (-a)^2 - 4(a^2 - 6a - 1)$$

$$= -3a^2 + 24a + 4$$

$$= -3(a - 4)^2 + 52$$

①が整数となる a を求めよ (a は整数である)

$$a = -1 \text{ とき } D < 0 \text{ となり不適}$$

$$a = 0 \text{ とき } D = 4 \cdot 2^2 \cdot x = \frac{\pm \sqrt{4}}{2} = \pm 1 \text{ となり不適}$$

$$a = 1 \text{ とき } D = 25 = 5^2 \cdot x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot x = -2, 3 \text{ となり不適}$$

$$a = 2 \text{ とき } D = 40 \text{ となり不適}$$

$$a = 3 \text{ とき } D = 49 = 7^2 \cdot x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \cdot x = -2, 5 \text{ となり不適}$$

$$a = 4 \text{ とき } D = 52 \text{ となり不適}$$

$$a = 5 \text{ とき } D = 49 = 7^2 \cdot x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \cdot x = -1, 6 \text{ となり不適}$$

$$a = 6 \text{ とき } D = 40 \text{ となり不適}$$

$$a = 7 \text{ とき } D = 25 = 5^2 \cdot x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \cdot x = 1, 6 \text{ となり不適}$$

$$a = 8 \text{ とき } D = 4 = 2^2 \cdot x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \cdot x = 3, 6 \text{ となり不適}$$

$$a = 9 \text{ とき } D < 0 \text{ となり不適}$$

$$\text{以上より } 1 + 3 + 5 + 7 + 8 = 24 \quad \text{--- (14), (15)}$$