

3

正五角形 ABCDE において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ とする。

問1 ベクトル $\overrightarrow{AE}$ をベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表すと、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{(22)}{(24)} - \sqrt{\frac{(23)}{(24)}} \vec{a} + \frac{(25)}{(24)} \vec{b}$$

である。

問2 $\triangle ACE$ の重心を G とする。このとき、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{(26)}{(28)} - \sqrt{\frac{(27)}{(28)}} \vec{a} + \frac{(29)}{(30)} \vec{b}$$

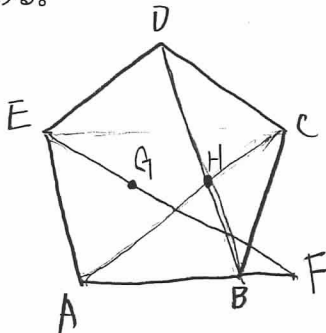
である。

問3 直線 AB と直線 EG の交点を F とする。このとき、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{(31)}{(33)} + \sqrt{\frac{(32)}{(33)}} \vec{a}$$

である。

解)



まず、

正五角形の1辺の長さを1と仮定する

対角線の長さを x と求める (AB=1, AC=x)

BDとACの交点をHとする

$$AB = AH$$

$$\therefore CH = x - 1$$

よって

$\triangle BAC$ と $\triangle HBC$ で あらば $BC:HC = AC:BC$

$$1:(x-1) = x:1$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}, |\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{CE}| = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b}$$

(22), (23), (24), (25)

(注) 正五角形の1辺の長さを1と仮定する
対角線の長さは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって

$$|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{CE}| = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$\vec{AG} = \frac{\vec{AC} + \vec{AE}}{3} \text{ 由 (16式27)}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{3} \left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} \right) \quad (\text{注 } \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{6} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$$

(26), (27), (28), (29), (30) 4

E, G, F は一直線上にあること

実数 k を用いて

$$\vec{EF} = k\vec{EG}$$

と表す

$$\therefore \vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$$

$$= \vec{AE} + k\vec{EG}$$

$$= \vec{AE} + k(\vec{AG} - \vec{AE})$$

$$= (1-k)\vec{AE} + k\vec{AG}$$

$$= (1-k) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vec{a} + \vec{b} \right) + k \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right)$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}k + \frac{3-\sqrt{5}}{6}k \right) \vec{a} + \left(1 - \frac{1}{3}k \right) \vec{b} \quad \text{--- ①}$$

よって A, B, F は一直線上にあるから 実数 λ を用いて

$$\vec{AF} = \lambda \vec{AB} = \lambda \vec{a}$$

よって ① の $\vec{AF}$ の $\vec{b}$ の係数は 0 より $1 - \frac{1}{3}k = 0 \quad \therefore k = 3$

$$\therefore \text{①} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times 3 + \frac{3-\sqrt{5}}{6} \times 3 \right) \vec{a}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}$$

(31), (32), (33) 4

(補足) 四角形 AFCE が平行四辺形であることに反しては

よって $\vec{AF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vec{a}$ が求まる。