

2

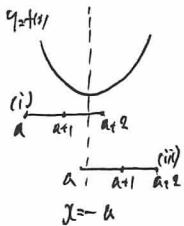
a を実数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax$ の閉区間 $[a, a+2]$ における最大値を a の関数とみなし、 $g(a)$ とする。

問 1 方程式 $g(a) = 15$ の解は、 $a = -\sqrt{(16)}$ と $a = (17)$ である。

問 2 $g(a) = k$ を満たす実数 a が存在しないための必要十分条件は、 $k < \frac{(18)}{(19)}$ である。

問 3 $g(a)$ の最小値を g_0 とおき、 $g(a)$ が最小値をとるとき a の値を a_0 とおく。任意の実数 a について、 $p(a-a_0)+g_0 \leq g(a)$ が成り立つための必要十分条件は、 $-(20) \leq p \leq (21)$ である。

解) $f(x) = x^2 + 2ax$
 $= (x+a)^2 - a^2$



(i) 閉区間 $[a, a+2]$ の中点 $a+1$ と軸 $x = -a$ が一致する $a+1 = -a$

つまり $a = -\frac{1}{2}$ かつ

$f(x)$ は $x = a$ で最大と最小をとる

$g(a) = f(a) = a^2 + 2a \cdot a = 3a^2$

(ii) 閉区間 $[a, a+2]$ の中点 $a+1$ と軸 $x = -a$ が一致する $a+1 = -a$

つまり $a = -\frac{1}{2}$ かつ

$f(x)$ は $x = a = -\frac{1}{2}$ で
 $x = a+2 = \frac{3}{2}$

かつ $f(x)$ は最大と最小をとる

$g(a) = g(-\frac{1}{2}) = \begin{cases} f(a) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 2a(-\frac{1}{2}) = -a + \frac{1}{4} = -(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ f(a+2) = f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} + 2a(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} + 2(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$

同じ値になる
 確認する

(iii) 閉区間 $[a, a+2]$ の中点 $a+1$ と軸 $x = -a$ が一致する $a+1 > -a$

つまり $-\frac{1}{2} < a$ かつ

$f(x)$ は $x = a+2$ で最大と最小をとる

$g(a) = f(a+2) = (a+2)^2 + 2a(a+2) = 3a^2 + 8a + 4$

以上より

$g(a) = \begin{cases} 3a^2 & (a < -\frac{1}{2}) \\ \frac{3}{4} & (a = -\frac{1}{2}) \\ 3a^2 + 8a + 4 & (-\frac{1}{2} < a) \end{cases}$

問 1 $a < -\frac{1}{2}$ かつ $g(a) = 15$

$3a^2 = 15$

$a^2 = 5$

$a = \pm\sqrt{5}$

$a < -\frac{1}{2}$ より $a = -\sqrt{5}$
 (16)

$a = -\frac{1}{2}$ かつ $g(a) = \frac{3}{4}$

不適

$-\frac{1}{2} < a$ かつ

$g(a) = 15$

$3a^2 + 8a + 4 = 15$

$3a^2 + 8a - 11 = 0$

$(3a+11)(a-1) = 0$

$a = -\frac{11}{3}, 1$

$-\frac{1}{2} < a$ より $a = 1$
 (17)

問2

$$g(a) = \begin{cases} 3a^2 & (a < -\frac{1}{2}) \\ \frac{3}{4} & (a = -\frac{1}{2}) \\ 3a^2 + 8a + 4 = 3(a + \frac{4}{3})^2 - \frac{4}{3} & (-\frac{1}{2} < a) \end{cases}$$

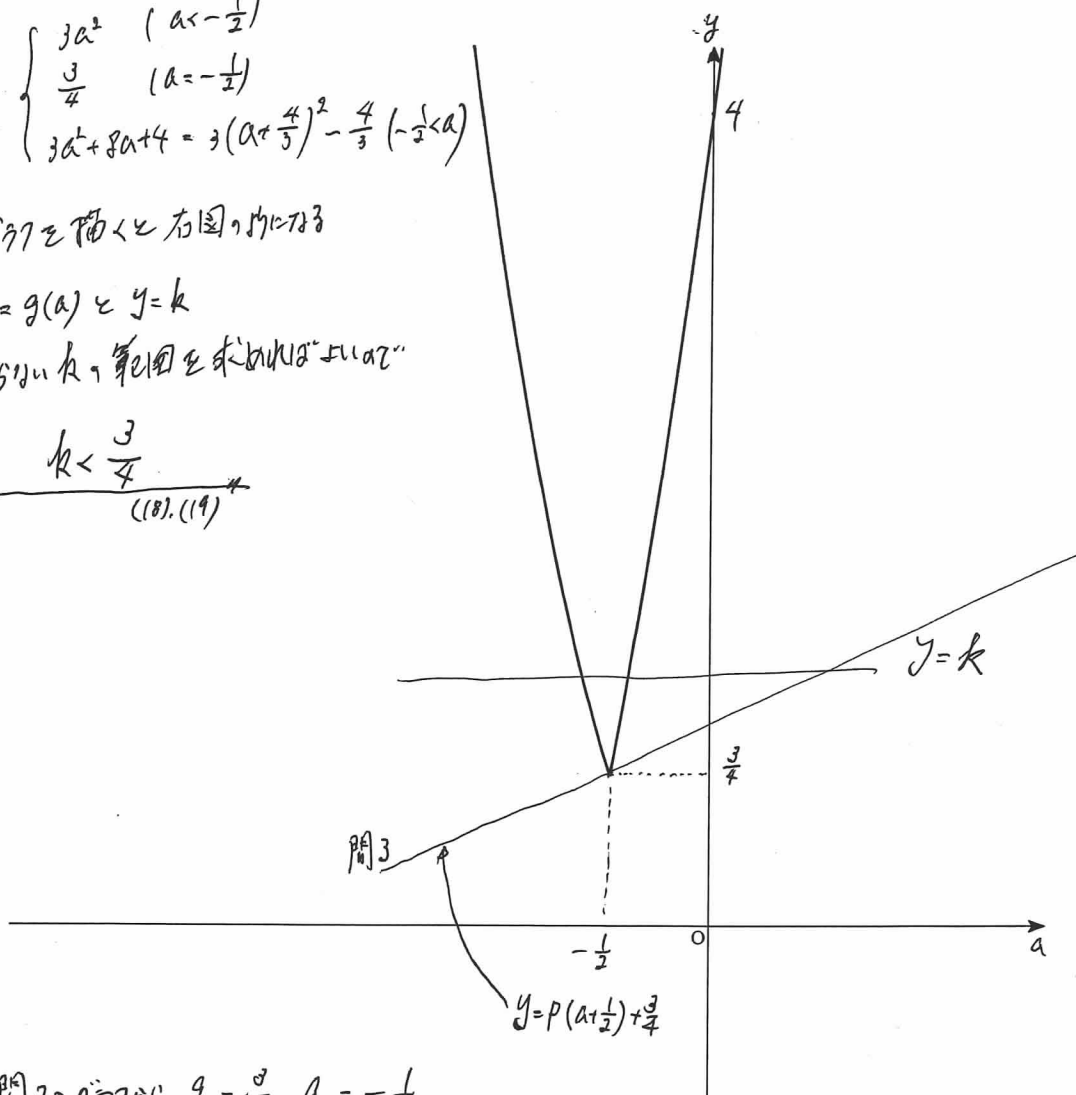
9737を軸として右図のようになる

よって $y = g(a)$ と $y = k$

が交わらない k の範囲を求めたい

$$k < \frac{3}{4}$$

(18), (19)



問3 問2の737の $g_0 = \frac{3}{4}$, $a_0 = -\frac{1}{2}$

$$p(a + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \leq g(a)$$

成立の p の範囲を求めよ

$y = p(a + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}$ が $y = g(a)$ ($y = g(a)$ は下に凸の737) の下側に交わらない (上図参照)

①は点 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 傾き p の直線だから p の最小値は $y = 3a^2$ 上の点 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ における接線の傾きに等しい

よって $y' = 6a = 6 \times (-\frac{1}{2}) = -3$ よって $-3 \leq p$

p の最大値は $y = 3a^2 + 8a + 4$ 上の点 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ における接線の傾きに等しい

$$\therefore y' = 6a + 8 = 6 \times (-\frac{1}{2}) + 8 = 5 \quad \therefore p \leq 5$$

$$\text{以上より } -3 \leq p \leq 5$$

(20), (21)