

3

O を原点とする座標平面上において、放物線 $C: y = 6 - \frac{9}{2}x^2$ を考える。正の数 t に対し、 C 上の点 $P_t\left(t, 6 - \frac{9}{2}t^2\right)$ における C の接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ A_t , B_t とする。3 点 O , A_t , B_t を頂点とする三角形 OA_tB_t の面積を $S(t)$ とすれば

$$S(t) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} t^3 + \text{ウ} t + \frac{\text{エ}}{t}$$

であり、 $t > 0$ の範囲で $S(t)$ のとり得る最小値を m とすれば $m = \frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$ である。

$$f(x) = 6 - \frac{9}{2}x^2$$

$$f'(x) = -9x$$

点 $P_t\left(t, 6 - \frac{9}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y - f(x) = f'(x)(x - x)$$

$$y - \left(6 - \frac{9}{2}t^2\right) = -9t(x - t)$$

$$y = -9tx + 6 + \frac{9}{2}t^2$$

$$y = 0 \text{ とき } x = \frac{t}{2} + \frac{2}{3t}$$

$$x = 0 \text{ とき } y = \frac{9}{2}t^2 + 6$$

$$\therefore A_t\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{3t}, 0\right), B_t\left(0, \frac{9}{2}t^2 + 6\right)$$

$$t > 0 \text{ であるから } \frac{t}{2} + \frac{2}{3t} > 0, \frac{9}{2}t^2 + 6 > 0$$

より

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t}{2} + \frac{2}{3t}\right) \times \left(\frac{9}{2}t^2 + 6\right)$$

$$= \frac{9}{8}t^3 + 3t + \frac{2}{t}$$

$$S'(t) = \frac{27}{8}t^2 + 3 - \frac{2}{t^2}$$

$$S'(t) = 0 \text{ となる } t \text{ を求める}$$

$$\frac{27}{8}t^2 + 3 - \frac{2}{t^2} = 0$$

$t \neq 0$ より

$$\frac{27}{8}t^4 + 3t^2 - 2 = 0$$

$$27t^4 + 24t^2 - 16 = 0$$

$$(3t^2 + 4)(9t^2 - 4) = 0$$

$$t^2 = \frac{4}{9} \quad t > 0 \text{ より } t = \frac{2}{3}$$

$t > 0$ で $S(t)$ の増減表は次のとおり

t	0		$\frac{2}{3}$	
$S'(t)$		-	0	+
$S(t)$			極小	

よって $S(t)$ は $t > 0$ かつ $t = \frac{2}{3}$ で

最小値をとり、その値は

$$\begin{aligned} m = S\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{9}{8} \times \frac{8}{27} + 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{3} + 5 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$