

第1問 次の問い (問1~3) に答えよ。

問1 1以上の整数 n に対して定義される a_n について $a_1 = 1$ とし、 xy 平面における曲線 $y = x^3$ 上の点 $A_n(a_n, a_n^3)$ における接線を L_n とする。直線 L_n と x 軸の交点を $B_{n+1}(a_{n+1}, 0)$

とすると、 $a_{n+1} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} a_n$ が成り立つ。また、曲線 $y = x^3$ と線分 $A_n B_{n+1}$ および x 軸に

よって囲まれる部分の面積を S_n とすると、 $S_1 = \frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\text{カキ}}{\text{クケコ}}$ である。

$$f(x) = x^3 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \therefore f'(a_n) = 3a_n^2$$

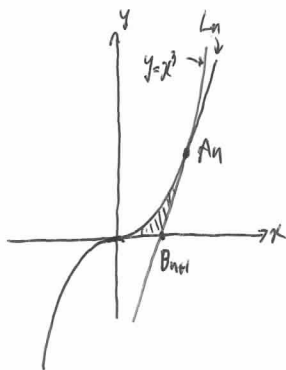
より 直線 L_n の方程式は点 $A_n(a_n, a_n^3)$ を通り

傾き $3a_n^2$ の直線であるから

$$y - a_n^3 = 3a_n^2(x - a_n)$$

$$y = 3a_n^2x - 2a_n^3$$

$$y=0 \text{ のとき } x = \frac{2}{3}a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$



左図より

$$S_n = \int_0^{a_n} x^3 dx - \int_{a_{n+1}}^{a_n} (3a_n^2x - 2a_n^3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^{a_n} - \left[\frac{3}{2}a_n^2x^2 - 2a_n^3x \right]_{a_{n+1}}^{a_n}$$

$$= \frac{1}{4}a_n^4 - \left(\frac{3}{2}a_n^2(a_n^2 - a_{n+1}^2) - 2a_n^3(a_n - a_{n+1}) \right)$$

$$= \frac{1}{4}a_n^4 - \frac{3}{2}a_n^2\left(a_n^2 - \frac{4}{9}a_n^2\right) + 2a_n^3\left(a_n - \frac{2}{3}a_n\right) \quad [a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n]$$

$$= \frac{1}{4}a_n^4 - \frac{3}{2}a_n^2 \times \frac{5}{9}a_n^2 + 2a_n^3 \times \frac{1}{3}a_n^2$$

$$= \frac{1}{12}a_n^4 \quad \therefore S_1 = \frac{1}{12}a_1^4 = \frac{1}{12} \quad (a_1 = 1)$$

より

$$\begin{aligned} \text{よ } S_{n+1} &= \frac{1}{12}a_{n+1}^4 = \frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^4 a_n^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{12}a_n^4 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot S_n \end{aligned}$$

より 数列 $\{S_n\}$ は 初項 $S_1 = \frac{1}{12}$

$$\text{公比 } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

の等比数列である

$$\begin{aligned} \text{よ } \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{16}{81}} \quad (\leftarrow \text{無限等比数列の和}) \\ &= \frac{\frac{1}{12} \times 81}{81 - 16} \\ &= \frac{\frac{27}{4}}{65} = \frac{27}{260} \end{aligned}$$

問2 $z \neq -\frac{1}{2}$ である複素数 z に対して、 $w = \frac{3z+1}{2z+1}$ と定める。このとき、 z は w を用いて $z = \frac{-w + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}w - \boxed{\text{ス}}}$ と表される。 z が純虚数であるとき、複素数平面において w の満たす点全体は、中心が $\begin{matrix} \boxed{\text{セ}} \\ \boxed{\text{ソ}} \end{matrix}$ 、半径 $\begin{matrix} \boxed{\text{タ}} \\ \boxed{\text{チ}} \end{matrix}$ の円から 2 点 $\begin{matrix} \boxed{\text{ツ}} \\ \boxed{\text{テ}} \end{matrix}$ 、 $\boxed{\text{ト}}$ を除いたものである。

$$w = \frac{3z+1}{2z+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2z+1)} \quad \text{より } w \neq \frac{3}{2} \text{ であり } \left(\frac{1}{2(2z+1)} \neq 0 \text{ より} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore w = \frac{3z+1}{2z+1} &\Leftrightarrow (2z+1)w = 3z+1 \quad (z \neq -\frac{1}{2} \text{ より}) \\ &\Leftrightarrow (2w-3)z = -w+1 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-w+1}{2w-3} \quad (w \neq \frac{3}{2} \text{ より}) \\ &\quad \text{サシス} \end{aligned}$$

$$z \text{ が純虚数} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \text{ かつ } z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-w+1}{2w-3} + \overline{\left(\frac{-w+1}{2w-3} \right)} = 0 \text{ かつ } w \neq 1 \quad \left(z \neq 0 \text{ より } \frac{-w+1}{2w-3} \neq 0 \therefore w \neq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-w+1}{2w-3} + \frac{-\bar{w}+1}{2\bar{w}-3} = 0 \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-w)(2\bar{w}-3) + (1-\bar{w})(2w-3) = 0 \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4w\bar{w} - 5w - 5\bar{w} + 6 = 0 \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow w\bar{w} - \frac{5}{4}w - \frac{5}{4}\bar{w} + \frac{3}{2} = 0 \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

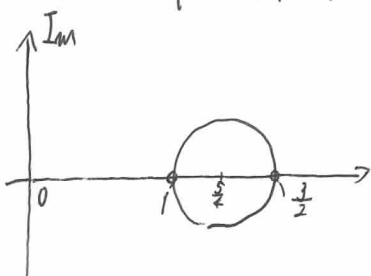
$$\Leftrightarrow \left(w - \frac{5}{4} \right) \left(\bar{w} - \frac{5}{4} \right) = -\frac{3}{4} + \frac{25}{16} \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{5}{4} \right|^2 = \frac{1}{16} \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{4} \text{ かつ } w \neq 1, \frac{3}{2}$$

$$\left| w - \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{4} \text{ は 中心 } \frac{5}{4}, \text{ 半径 } \frac{1}{4} \text{ の円を表し (図参照)}$$

この円周上の 2 点 $1, \frac{3}{2}$ を除く。
ワタト



問3 さいころ1個を3回投げて、出た目を順に x_1, x_2, x_3 とする。 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ が4の倍数となる確率は $\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$ である。また、 $x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3$ が4の倍数となる確率は $\frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$ である。なお、さいころの6個の目について、どの目の出る確率も等しいものとする。

全事象は 6^3 通り

x_1, x_2, x_3 が4の倍数とはならない場合の数は

(i) 奇数しか出ない $\rightarrow 3^3$ 通り
2は

4の2個は奇数4個

(ii) 2は6の1個のみ出る $\therefore 3 \times 2 \times 3^2 = 2 \times 3^3$ (通り)
3個中2個がサイコロの目2は6か?

よって4の倍数とはならない確率は

$$\frac{3^3 + 2 \times 3^3}{6^3} = \frac{3^4}{6^3} = \frac{3}{8} \quad \therefore 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

サイコロの目と4で割った余りの表は次のとおり

x (サイコロの目)	1	2	3	4	5	6
4で割った余り	1	2	3	0	1	2

x^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
4で割った余り	1	0	1	0	1	0

よって $x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3$ が4の倍数となる組合せを数えると次のようになる

	x_1	x_2^2	x_3^3	
4で割った余り	3	0	1	$\rightarrow x_1: 1 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 2 \text{ 通り} \therefore 6 \text{ 通り}$
	3	1	0	$\rightarrow x_1: 1 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 3 \text{ 通り} \therefore 9 \text{ 通り}$
	0	0	0	$\rightarrow x_1: 1 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 3 \text{ 通り} \therefore 9 \text{ 通り}$
	0	1	3	$\rightarrow x_1: 1 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 1 \text{ 通り} \therefore 3 \text{ 通り}$
	1	0	3	$\rightarrow x_1: 2 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 1 \text{ 通り} \therefore 6 \text{ 通り}$
	2	1	1	$\rightarrow x_1: 2 \text{ 通り}, x_2: 3 \text{ 通り}, x_3: 2 \text{ 通り} \therefore 12 \text{ 通り}$
				計 45 通り

$$\therefore \frac{45}{6^3} = \frac{3^2 \times 5}{2^3 \times 3^3} = \frac{5}{24}$$