

2 n を正の整数とする。長さが等しい n 本のひもがある。これらに 1 本ずつ異なる番号 $1, 2, \dots, n$ をつけ、番号 k のひもの両端を l_k, r_k とし区別する (図参照→クリック)。

ひもの端 $2n$ か所から無作為に 2 か所ずつ選び、それらをそれぞれ結ぶ。

例えば、 $n = 2$ の場合は、2 本のひもがつながって 1 つの輪ができるか、2 つの輪ができるかのいずれかである。

(1) $n = 3$ のとき、すべてのひもがつながって 1 つの輪ができる確率を求める。

ひもの端 6 か所を 2 ずつ結ぶ方法は、異なる 6 個のものを 2 個ずつ 3 つの組に分ける方法に等しいから、アイ 通りある。

3 本のひもがつながって 1 つの輪ができる場合、 l_1 は r_1 以外と結ぶから、 l_1 を結ぶ端の選び方は、ウ 通り。 l_1 と l_2 を結んだとすると、 r_2 は l_3 または r_3 と結ぶから、2 通り。残った 2 か所を結ぶ方法は 1 通りとなる。

よって、3 本のひもがつながって 1 つの輪ができる結び方は、エ 通りである。

したがって、 $n = 3$ のとき、すべてのひもがつながって 1 つの輪ができる確率は オ カキ である。

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} &= \frac{\frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{6} \\ &= \frac{15 \times 6}{6} \\ &= \frac{15}{1} \end{aligned}$$

l_1 を結ぶ端は l_2, r_2, l_3, r_3 の 4 通り
ウ

3 本のひもがつながって 1 つの輪ができる結び方は

$$\frac{4 \times 2 \times 1}{1} = 8 \text{ (通り)}$$

エ

よって 確率は $\frac{8}{15}$

オ

(2) $n=4$ のとき、すべてのひもがつながって1つの輪ができる確率は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(3) $n=5$ のとき、ちょうど2つの輪ができる確率は $\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

(2) ひもの端 8ヶ所を2つずつ結ぶ方法は

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{4!} = 105 \text{ (通り)}$$

4本のひもが1つにつながって1つの輪ができる結ぶ方は

$$6 \times 4 \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

$$\text{以上より 求める確率は } \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$$

クケコ

(3) ひもの端 10ヶ所を2つずつ結ぶ方法は

$$\frac{{}_{10}C_2 \times {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{5!} = 945 \text{ (通り)}$$

1本のひもと4本のひもで2つの輪ができる結ぶ方は

まず 5本中1本を結ぶのが 5通り

1本のひもが輪になる結ぶ方は 1通り

4本のひもが1つの輪になる結ぶ方は (2) より 48通り

$$\left. \begin{array}{l} \text{よって } 5 \times 1 \times 48 \\ = 240 \text{ (通り)} \end{array} \right\}$$

2本のひもと3本のひもで2つの輪ができる結ぶ方は

まず 5本中2本を結ぶのが ${}_5C_2 = 10$ (通り)

2本のひもが輪になる結ぶ方は 2通り

3本のひもが輪になる結ぶ方は (1) より 8通り

$$\left. \begin{array}{l} \text{よって } 10 \times 2 \times 8 \\ = 160 \text{ (通り)} \end{array} \right\}$$

以上より 5本のひもでちょうど2つの輪ができるのは $240 + 160 = 400$ (通り)

$$\text{よって 求める確率は } \frac{400}{945} = \frac{80}{189}$$

シセソタ