

4 次の問いに答えなさい。

(1) p を実数の定数とすると、数列 $\{n^p\}$ (n は自然数) の和を

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \text{ とおく。}$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \cdots \text{①}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \cdots \text{②}$$

$$S_3(n) = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}n^3 + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}n^2 \quad \cdots \text{③}$$

である。次の方法で $S_4(n)$ を求める。

二項定理から

$(k+1)^5 - k^5 = \boxed{\text{エ}}k^4 + \boxed{\text{オカ}}k^3 + \boxed{\text{オカ}}k^2 + \boxed{\text{エ}}k + 1$ である。この式の k に 1 から n までを代入して得られる n 個の式の辺々をそれぞれ加えると

$$(n+1)^5 - 1^5 = \boxed{\text{エ}}S_4(n) + \boxed{\text{オカ}}S_3(n) + \boxed{\text{オカ}}S_2(n) + \boxed{\text{エ}}S_1(n) + n$$

となる。①, ②, ③ より

$$S_4(n) = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}n^5 + \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}n^3 - \frac{1}{\boxed{\text{コサ}}}n$$

となる。

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

717

10251493751
 $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$
 (10251493751)

1 1
 1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1

かゝ
 $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$
 エ オカ

$$k=1 \quad 2^5 - 1^5 = 5 \times 1^4 + 10 \times 1^3 + 10 \times 1^2 + 5 \times 1 + 1$$

$$k=2 \quad 3^5 - 2^5 = 5 \times 2^4 + 10 \times 2^3 + 10 \times 2^2 + 5 \times 2 + 1$$

$$k=3 \quad 4^5 - 3^5 = 5 \times 3^4 + 10 \times 3^3 + 10 \times 3^2 + 5 \times 3 + 1$$

⋮

$$k=n+1 \quad \frac{(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}{(n+1)^5 - 1^5 = 5(1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 10(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 5(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 1 + \dots + 1)}$$

$$= 5S_4(n) + 10S_3(n) + 10S_2(n) + 5S_1(n) + n$$

$$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5S_4(n) + 10\left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right) + 10\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + 5\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) + n$$

$$5S_4(n) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - \frac{5}{2}n^4 - 5n^3 - \frac{5}{2}n^2 - \frac{10}{3}n^3 - 5n^2 - \frac{5}{3}n - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - n$$

$$= n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n$$

$$\therefore S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

✂✂✂✂

(2) n を 2 以上の整数とする。

1^2 から n^2 までの異なる n 個の平方数 (整数を 2 乗した数)

$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$

の中から異なる 2 個の数を取り出してつくった積すべての和を T とする。

(1) の $S_p(n)$ を用いると

$$T = \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \left[\left\{ S_{\boxed{\text{ス}}}(n) \right\}^{\boxed{\text{セ}}} - S_{\boxed{\text{ソ}}}(n) \right]$$

$$= \frac{1}{18} n^6 + \frac{1}{\boxed{\text{タチ}}} n^5 - \frac{5}{\boxed{\text{ツテ}}} n^4 - \frac{1}{\boxed{\text{トナ}}} n^3 + \frac{1}{72} n^2 + \frac{1}{60} n$$

である。

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)^2 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 + 2(1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)^2 \cdot n^2)$$

$$\text{よ) } \{S_2(n)\}^2 = S_4(n) + 2T$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \left[\{S_2(n)\}^2 - S_4(n) \right]$$

ミスセソ

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \right)^2 - \left(\frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} n^6 + \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{36} n^2 + \frac{1}{3} n^5 + \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{9} n^4 - \frac{1}{5} n^5 - \frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{30} n \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} n^6 + \frac{2}{15} n^5 - \frac{5}{36} n^4 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{36} n^2 + \frac{1}{30} n \right)$$

$$= \frac{1}{18} n^6 + \frac{1}{15} n^5 - \frac{5}{72} n^4 - \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{72} n^2 + \frac{1}{60} n$$

ヲタツテトナ