

3 底面の正方形 ABCD の 1 辺の長さが $\sqrt{2}$, 高さが 1 の正四角錐 O-ABCD を考える。
 ただし, 正四角錐とは底面が正方形で, 側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐をいう。
 辺 OC の中点を M, 正方形 ABCD の対角線の交点を K とし, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とする。

このとき

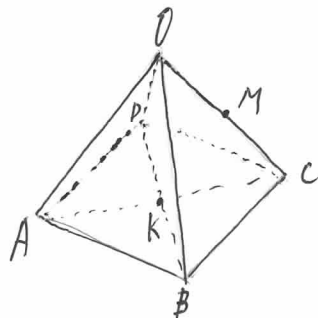
$$|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{イ}}$$

である。

線分 AM と平面 OBD の交点を N とするとき

$$\vec{ON} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{OK}$$

である。



$\triangle OAK$ において

$$\angle OKA = 90^\circ$$

$$OK = AK = 1 \text{ より } OA = \sqrt{2}$$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{2}$$

$$\triangle OAB \text{ は } OA = OB = AB = \sqrt{2}$$

の正三角形より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\theta: \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ の夹角})$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 60^\circ$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$\triangle OAC \text{ は } OA = OC = \sqrt{2}$$

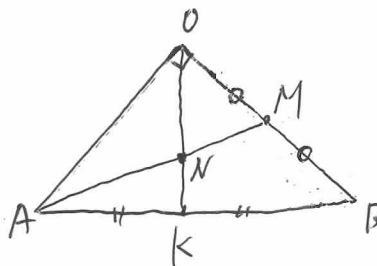
$$AC = 2$$

より $\angle AOC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形
 (右図参照)

メネラウスの定理より

$$\frac{NK}{ON} \times \frac{AB}{KA} \times \frac{MO}{BM} = 1$$

$$\therefore \frac{NK}{ON} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore ON: NK = 2:1 \quad \text{より} \quad \vec{ON} = \frac{2}{3} \vec{OK}$$



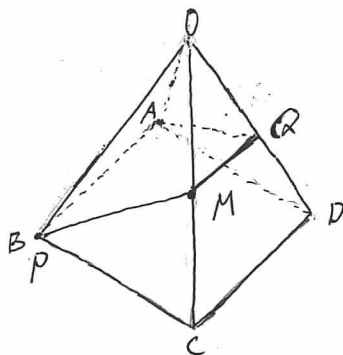
辺 OB 上に点 P を $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OB}$ ($0 < p \leq 1$) となるようにとり、辺 OD 上に点 Q を $\overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OD}$ ($0 < q \leq 1$) となるようにとり、4 点 A, M, P, Q が同一平面上にあるようにする。

$p=1$ のとき $q = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。

p がとり得る値の最小値は

$p = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$

である。



$p=1$ だと p は点 B と一致する

4点 A, M, B(P), Q が同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{QM} \text{ となるから } OQ : QD = 1 : 1 \quad \therefore q = \frac{1}{2}$$

オカ

又 逆に $q=1$ だと $p = \frac{1}{2}$ となり $p < \frac{1}{2}$ だと $q > 1$ となるので

p の最小値は $p = \frac{1}{2}$

③

④ ② 後

$$3pq = p + q$$

という関係式が求まる

$$q(3p-1) = p$$

$0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$ より $p = \frac{1}{3}$ とすると $0 = p$ となり矛盾

$\therefore p \neq \frac{1}{3}$ である

$$q = \frac{p}{3p-1}$$

$$0 < q \leq 1 \text{ より } 0 < \frac{p}{3p-1} \leq 1$$

($3p-1$) を倍して

$$0 < p(3p-1) \leq (3p-1)^2$$

$$0 < p(3p-1) \text{ かつ}$$

$$p < 0, \frac{1}{3} < p \text{ --- ①}$$

$$p(3p-1) \leq (3p-1)^2 \text{ かつ}$$

$$p(3p-1) - (3p-1)^2 \leq 0$$

$$(3p-1)\{p - (3p-1)\} \leq 0$$

$$(3p-1)(2p-1) \geq 0$$

$$\therefore p < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \leq p \text{ --- ②}$$

①② より $\frac{1}{2} \leq p$ となる p の最小値 $\frac{1}{2}$

と解答が合っている
が、よく見ると

4点 A, M, P, Q が同一平面上にある条件から, p と q の間に

ケ $pq = p + q$

という関係が成り立つ。

線分 PQ の長さの 2 乗は $PQ^2 =$ コ $(p+q)^2 -$ サ pq と表せる。 $p+q$ の最小値は

シ
ス

であるから, 線分 PQ の長さは $p =$ セ
ソ のとき, 最小値 タ
チ をとる。

4.5. A, M, P, Q が同一平面上にある条件は

$$\vec{AM} = s\vec{AP} + t\vec{AQ}$$

とある実数 s, t が存在することである

$$\vec{OM} - \vec{OA} = s(\vec{OP} - \vec{OA}) + t(\vec{OQ} - \vec{OA})$$

$$\vec{OM} = (1-s-t)\vec{OA} + s\vec{OP} + t\vec{OQ}$$

$$= (1-s-t)\vec{a} + sp\vec{b} + tq(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$= (1-s-t+q)\vec{a} + (sp-tq)\vec{b} + tq\vec{c}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{c} \text{ と } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は 1 次独立だから}$$

$$\begin{cases} 1-s-t+q=0 & \text{--- ①} \\ sp-tq=0 & \text{--- ②} \\ tq=\frac{1}{2} & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\text{① ② より } s+t=\frac{3}{2} \text{ --- ④}$$

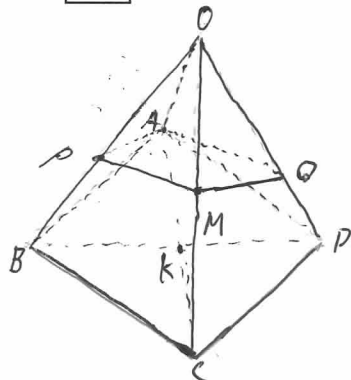
$$\text{② ③ より } sp=\frac{1}{2} \therefore s=\frac{1}{2p} \text{ --- ⑤}$$

$$\text{③ より } q=\frac{1}{2t} \text{ --- ⑥}$$

$$\text{⑤ ⑥ を ④ に代入}$$

$$\frac{1}{2p} + \frac{1}{2t} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore p+t=3pt \quad \underline{3pt=p+t}$$



$$\text{⑦ } \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB}$$

$$\therefore \vec{KB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\therefore \vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB}$$

$$= \vec{OK} + \vec{KB}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

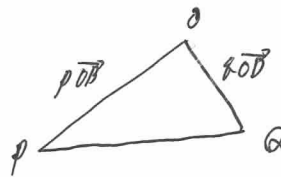
$$= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

$$\therefore \vec{OB} = 2\vec{OK}$$

$$= 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$\triangle OPQ$ にあて

$$\angle POQ = 90^\circ \text{ あり}$$



$$|\vec{OP}| = p|\vec{OB}| = \sqrt{2}p$$

$$|\vec{OQ}| = q|\vec{OB}| = \sqrt{2}q$$

2辺から三平方の定理より

$$PQ^2 = (\sqrt{2}p)^2 + (\sqrt{2}q)^2$$

$$= 2p^2 + 2q^2$$

$$= 2(p+q)^2 - 4pq$$

□□

p, q は正の数だから (相加平均) $\geq$ (相乗平均)

$$\text{より } p+q \geq 2\sqrt{pq} \text{ (等号成立は } p=q \text{)}$$

$$3pq = p+q \text{ 2辺から } pq = \frac{p+q}{3}$$

$$\therefore p+q \geq 2\sqrt{\frac{p+q}{3}}$$

両辺2乗して $p+q = X$ とおくと

$$X^2 \geq \frac{4}{3}X$$

$$3X^2 - 4X \geq 0$$

$$X(3X-4) \geq 0$$

$$\therefore X \leq 0, \frac{4}{3} \leq X$$

$$X = p+q > 0 \text{ より } \frac{4}{3} \leq X$$

よって X のとき $p+q$ の最小値は $\frac{4}{3}$ 以上であり

等号成立 $p=q$ と $3pq = p+q$ から $p=q = \frac{2}{3}$

よって $p+q$ の最小値は $\frac{4}{3}$

□□

$$7 \quad PQ^2 = 2(P+Q)^2 - 4PQ$$

$$= 2(P+Q)^2 - 4 \times \frac{1}{3}(P+Q)$$

$$= 2X^2 - \frac{4}{3}X \quad (X = P+Q \text{ 任意值 } X \geq \frac{4}{3})$$

$$= 2\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$$

$$7. 1) \quad X \geq \frac{4}{3} \text{ 任意值 } X = \frac{4}{3} \text{ 时 } PQ^2 \text{ 的最小值 } \frac{16}{9}$$

$$\therefore \quad P = \frac{2}{3} \text{ 时 } PQ \text{ 的最小值 } \frac{4}{3} \quad (1) \quad X = \frac{4}{3} \text{ 任意值 } P=Q=\frac{2}{3}$$