

1 次の問いに答えなさい。

(1) 実数 x, y についての式 F を

$$F = 4^{x+1} + 4^{y+1} - 2^{x+2} - 2^{y+2} - 10$$

とする。

$y = 0$ のとき, x がすべて実数値をとるならば, F は, $x =$ アイ で最小値 ウエオ をとる。

また, $y = -x$ であるとき, $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと, F は t を用いて

$$F = \text{カ} t^2 - \text{キ} t - \text{クケ}$$

と表せるから, x がすべての実数値をとるとき, F は最小値 コサシ をとる。

$$y = 0 \text{ より}$$

$$F = 4^{x+1} + 4 - 2^{x+2} - 2^2 - 10$$

$$= 4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x - 10$$

$$2^x = k \text{ とおくと } k > 0 \text{ --- ①}$$

$$4^x = k^2 \text{ とおくと}$$

$$F = 4k^2 - 4k - 10$$

$$= 4\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 11$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ より } 2^x = 2^{-1} \text{ より } x = -1 \text{ かつ 最小値 } \frac{-11}{\text{アイ}} \text{ ウエオ}$$

* 等号成立は

$$2^x = 2^{-x}$$

より $(2^x)^2 = 1$

$$2^x > 0 \text{ より}$$

$$2^x = 1$$

$$\therefore x = 0$$

$$y = -x \text{ とおくと}$$

$$F = 4^{x+1} + 4^{-x+1} - 2^{x+2} - 2^{-x+2} - 10$$

$$= 4 \cdot 4^x + 4^{-x} - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x} - 10$$

$$= 4(4^x + 4^{-x}) - 4(2^x + 2^{-x}) - 10$$

$$t = 2^x + 2^{-x} \text{ とおくと (相対平均)} \geq (\text{相乗平均}) \text{ より } t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}$$

$$t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 \text{ より } 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2 \text{ とおくと}$$

$$t \geq 2 \text{ (等号成立は } x = 0 \text{) } \quad \text{※参照}$$

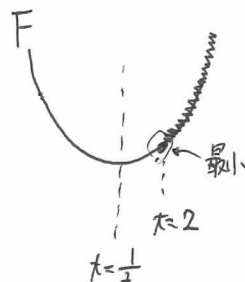
$$F = 4(t^2 - 2) - 4t - 10$$

$$= 4t^2 - 4t - 18$$

$$= 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 19$$

$$t \geq 2 \text{ であるから } t = 2 \text{ のとき } F \text{ は最小値}$$

$$\text{最小値 } \frac{-10}{\text{コサシ}}$$



(2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - [x]$ とする。ただし、実数 x に対し、 $[x]$ は x を超えない最大の整数とする。

a, b を正の整数とし、2つの集合 A, B を

$$A = \{x | f(ax) = 0, 0 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x | f(bx) = 0, 0 \leq x \leq 2\}$$

とする。

$f(ax) = 0$ が成り立つとき、 ax は整数であるから、集合 A, B の要素の個数をそれぞれ $n(A), n(B)$ とすると

$$n(A) = \boxed{\text{ス}} a + \boxed{\text{セ}}, n(B) = \boxed{\text{ス}} b + \boxed{\text{セ}}$$

である。

$n(A) = 131, n(B) = 183$ のとき、 $a = \boxed{\text{ソタ}}, b = \boxed{\text{チツ}}$ であり、 $n(A \cap B) = \boxed{\text{テト}}$ である。

$$0 \leq x \leq 2 \text{ であり } 0 \leq ax \leq 2a$$

よって $0 \leq ax \leq 2a$ の範囲にある整数は

$$ax = 0, 1, 2, \dots, 2a$$

$$\text{よって } 2a + 1 \text{ (個)}$$

bx にも同じく同様で

$$bx = 0, 1, 2, \dots, 2b$$

$$\text{よって } 2b + 1 \text{ (個)}$$

$$\therefore n(A) = 2a + 1, n(B) = 2b + 1$$

$$\begin{cases} 2a + 1 = 131 \\ 2b + 1 = 183 \end{cases} \text{ より } \begin{cases} a = 65 \\ b = 91 \end{cases}$$

$$\therefore \text{よって } 65x = 0, 1, 2, \dots, 130$$

$$91x = 0, 1, 2, \dots, 182$$

$$\text{よって } x = \frac{k}{65} \quad (0 \leq k \leq 130 : k \text{ 整数})$$

$$x = \frac{l}{91} \quad (0 \leq l \leq 182 : l \text{ 整数})$$

と表せば $n(A \cap B)$ の個数は

$$\frac{k}{65} = \frac{l}{91}$$

よって k と l の個数に一致可なり

$$91k = 65l$$

$$7k = 5l$$

7 と 5 は互いに素であり

k は 5 の倍数、 l は 7 の倍数

$0 \leq k \leq 130$ で 5 の倍数は 27 個

$[0 \leq l \leq 182$ で 7 の倍数は 27 個]

$$\text{よって } n(A \cap B) = \frac{27}{\text{ソト}}$$