$\boxed{2}$

(1) 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(1,2)$ に対して，関数 $f(t)$ を

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{|\vec{a}-t\vec{b}|}-\frac{1}{|\vec{a}+t\vec{b}|}\right) \qquad (t \text{ は } 0 \text{ と異なる実数})$$

と定める。このとき

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$$

である。

$$\vec{a}-t\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-t\\4-2t\end{pmatrix}$$

より $|\vec{a}-t\vec{b}|=\sqrt{(3-t)^2+(4-2t)^2}$

$=\sqrt{5t^2-22t+25}$

同様にして

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{5t^2+22t+25}$

ここで $g(t)=5t^2-22t+25$，

$h(t)=5t^2+22t+25$

とおくと

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sqrt{g(t)}}-\frac{1}{\sqrt{h(t)}}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{\sqrt{h(t)}-\sqrt{g(t)}}{\sqrt{h(t)}\sqrt{g(t)}}\right)$$

$(x-y)(x+y)$
$=x^2-y^2$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{h(t)-g(t)}{\sqrt{h(t)}\sqrt{g(t)}\left(\sqrt{h(t)}+\sqrt{g(t)}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{44t}{\sqrt{h(t)}\sqrt{g(t)}\left(\sqrt{h(t)}+\sqrt{g(t)}\right)}\right)$$

$$=\frac{44}{\sqrt{h(t)}\sqrt{g(t)}\left(\sqrt{h(t)}+\sqrt{g(t)}\right)}$$

$\lim_{t\to 0} h(t)=\lim_{t\to 0} g(t)=\sqrt{25}$
$=5$

より

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\frac{44}{5\times 5(5+5)}$$

$$=\frac{44}{5\times 5\times 10}$$

$$=\frac{22}{5\times 5\times 5}$$

$$=\frac{22}{125}$$

アイウエオ

(2) 関数

$$f(x)=\int_1^x \frac{x+4t}{\sqrt{3x^4+t^4}}dt \quad (x>0)$$

の $x=2$ における微分係数は $f'(2)=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

$$f(x)=\int_1^x \frac{x\left(1+4\frac{t}{x}\right)}{\sqrt{x^4\left(3+\left(\frac{t}{x}\right)^4\right)}}dt$$

$$=\int_1^x \frac{x\left(1+4\frac{t}{x}\right)}{x^2\sqrt{3+\left(\frac{t}{x}\right)^4}}dt$$

$$=\int_1^x \frac{1+4\cdot\frac{t}{x}}{\sqrt{3+\left(\frac{t}{x}\right)^4}}\cdot\frac{dt}{x}$$

ここで $\frac{t}{x}=T$ とおくと $\frac{dT}{dt}=\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dt}{x}=dT$

t	$1 \longrightarrow x$
T	$\frac{1}{x} \longrightarrow 1$

より $f(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1+4T}{\sqrt{3+T^4}}dT$

$$=\Big[g(T)\Big]_{\frac{1}{x}}^{1}$$

$$=g(1)-g\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

ここで $g'(T)=\dfrac{1+4T}{\sqrt{3+T^4}}$ である

$$\therefore f'(x)=\left(g(1)-g\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)'$$

$$=-g'\left(\tfrac{1}{x}\right)\times\left(\tfrac{1}{x}\right)'$$ 合成関数の微分

$$=-g'\left(\tfrac{1}{x}\right)\times\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$=g'\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$

よって $f'(2)=g'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2^2}$

$$=\frac{1+4\times\frac{1}{2}}{\sqrt{3+\left(\frac{1}{2}\right)^4}}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\frac{49}{16}}}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3\times4}{7}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{7}$$

カキ