

5 自然数 n に対して関数 $f_n(x) = x + \log \frac{1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x}}{n}$ で定める。ただし、対数は自然対数である。

このとき

$$f_n(0) = \boxed{\text{ア}}$$

である。

数列 $\{a_n\}$ を、 $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x}$ で定める。一般に、微分可能な関数 $g(x)$ の $x = t$ における微分係数 $g'(t)$ は、

$$g'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t}$$

であることから

$$a_n = \frac{n + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

$$\begin{aligned} f_n(0) &= 0 + \log \frac{1 + e^0 + e^0 + \dots + e^0}{n} = 0 + \log \frac{n}{n} \\ &= 0 + \log 1 \\ &= \frac{0}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \quad (\because f_n(0) = 0) \\ &= f'_n(0) \end{aligned}$$

$$\therefore f_n(x) = x + \log (1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x}) - \log n$$

$$\text{よ} \quad f'_n(x) = 1 + \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + (n-1)e^{(n-1)x}}{1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x}}$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \quad f'_n(0) &= 1 + \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{1 + 1 + \dots + 1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n} \\ &= 1 + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{n + \boxed{\text{カ}}}$$

であり

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \boxed{\text{キ}}$$

である。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k+1} \times \frac{2}{k+2} \right) \\ &= 4 \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2 - \frac{4}{n+2} \\ &\quad \text{エオカ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{n+2} \right) \\ &= 2 \\ &\quad \text{キ} \end{aligned}$$

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 \left(\frac{n+3}{n} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+n}{n} \right)^n \right\}^{\frac{1}{4an^2n+1}}$$

で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^l$ とする

$$l = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

両辺 $\log$ をとり対数をとり

$$\log b_n = \log \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 \left(\frac{n+3}{n} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+n}{n} \right)^n \right\}^{\frac{1}{4an^2n+1}} \quad (1) \quad \frac{1}{4an^2n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 2 \log \left(1 + \frac{2}{n} \right) + 3 \log \left(1 + \frac{3}{n} \right) + \cdots + n \log \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n k \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$n \rightarrow \infty \text{ とき } \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 x \log(1+x) dx \quad \star \text{ 区間求積}$$

2項和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log b_n = \int_0^1 x \log(1+x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \log|x+1| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^{\frac{1}{4}}$$

$$l = \frac{1}{4}$$