

第3問 xy 平面において $\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ によって表される曲線を C とする。
このとき、次の問い (問1~4) に答えよ。

問1 C 上の点を $P(x, y)$ とする。 x 座標が最大であるときの y 座標は $\frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$ である。

また、 C と x 軸の共有点のうち原点ではないものを点 Q とすると、 Q は $\theta = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\pi$ に対

応する点であり、 Q における曲線 C の接線の方程式は $y = \text{オ}x - \frac{\text{カ}\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$ である。

$$x = \sin 2\theta \text{ は } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ とき最大となるので } \therefore \text{ とき } y = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

C と x 軸の共有点の y 座標は 0 とき

$$\sin 3\theta = 0 \Leftrightarrow 3\theta = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{n}{3}\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とき } \theta = 0, \frac{\pi}{3}$$

$$\text{原点を除外する } \theta \neq 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi$$

よって $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ とき

よって Q における接線の傾きは

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos 2\theta \text{ とき } \left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 2\cos \frac{2\pi}{3} = -1$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos 3\theta \text{ とき } \left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 3\cos \pi = -3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

よって Q における接線の方程式は

$$y - 0 = 3(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad y = 3x - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

問2 $y^2 = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \cos \boxed{\text{コ}} \theta}{\boxed{\text{サ}}}$ 、 $y^2 \frac{dx}{d\theta} = \cos \boxed{\text{シ}} \theta - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} (\cos \boxed{\text{ソ}} \theta + \cos \boxed{\text{タ}} \theta)$ で

ある。ただし、 $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}}$ とする。

$$\begin{aligned}
 y^2 &= \sin^2 3\theta \\
 &= 1 - \cos^2 3\theta \\
 &= 1 - \frac{1 + \cos 6\theta}{2} \\
 &= \frac{1 - \cos 6\theta}{2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ sy} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \text{ sy} \end{array} \right\}$$

729

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos 2\theta \text{ 729}$$

$$\begin{aligned}
 y^2 \frac{dx}{d\theta} &= \frac{1 - \cos 6\theta}{2} \times 2 \cos 2\theta \\
 &= \cos 2\theta - \cos 6\theta \cos 2\theta \\
 &= \cos 2\theta - \frac{\cos 8\theta + \cos 4\theta}{2} \\
 &= \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\cos 4\theta + \cos 8\theta)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \end{array} \right\} \text{ sy}$$

3247

問3 Cと直線 $y=x$ の共有点で原点でないものを点 $A(\alpha, \alpha)$ とすると、 A は $\theta = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi$

に対応する C 上の点であり、この値を θ_0 とおくと $\cos \theta_0 = \frac{\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ となる。また、

$$\alpha^2 = \frac{\boxed{\text{ニ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} \text{ となる。}$$

$$y=x \text{ かつ } y-x=0$$

$$\therefore \sin 3\theta - \sin 2\theta = 0$$

$$2 \cos \frac{5}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta = 0$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \alpha+\beta=3\theta, \alpha-\beta=2\theta \text{ かつ}$$

$$\alpha = \frac{5}{2}\theta, \beta = \frac{1}{2}\theta$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{5}{2}\theta = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\ \frac{1}{2}\theta = n\pi \end{cases} \quad (m, n \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pm \frac{\pi}{5} + \frac{4}{5}m\pi \quad \text{--- ①} \\ \theta = 2n\pi \quad \text{--- ②} \end{cases}$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ かつ ②は存在しない。①より } m=0 \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}\pi$$

$$\theta_0 = \frac{1}{5}\pi \text{ とおく}$$

$$\sin 3\theta_0 - \sin 2\theta_0 = 0$$

$$\text{両辺を } \sin \theta_0 \text{ で割ると } 3 \sin \theta_0 - 4 \sin^3 \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0$$

$$\sin \theta_0 (3 - 4 \sin^2 \theta_0 - 2 \cos \theta_0) = 0$$

$$\sin \theta_0 \neq 0 \text{ かつ } 3 - 4(1 - \cos^2 \theta_0) - 2 \cos \theta_0 = 0$$

$$4 \cos^2 \theta_0 - 2 \cos \theta_0 - 1 = 0$$

$$\text{解の公式より } \cos \theta_0 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos \theta_0 > 0 \text{ かつ } \cos \theta_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\alpha^2 = \sin^2 2\theta_0$$

$$= 1 - \cos^2 2\theta_0 \quad \text{--- ③}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 2\theta_0 &= 2 \cos^2 \theta_0 - 1 \\ &= 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

したがって

$$\text{③} = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$$

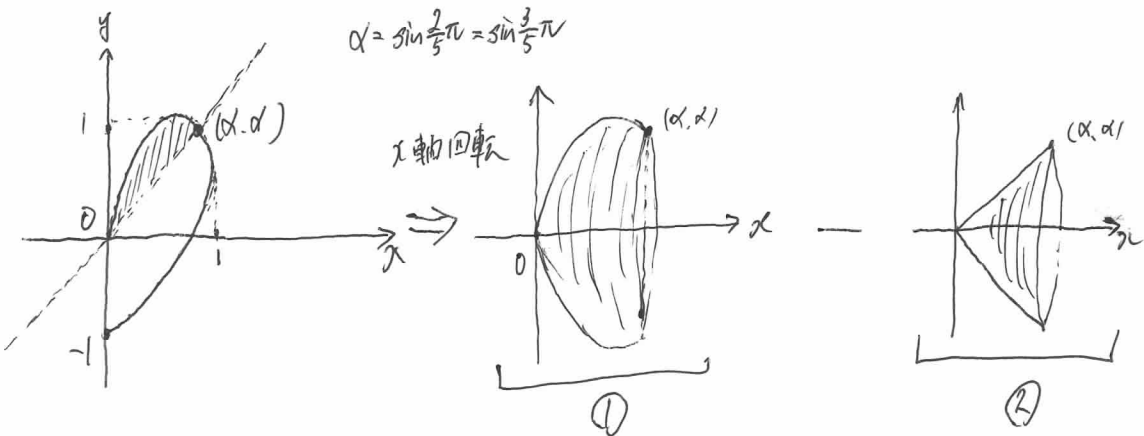
$$= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

二又

問4 Cと直線 $y=x$ で囲まれる部分を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を V

とする。 α を問3の値とすると、 $\frac{V}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ノハ}} - \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \pi$ となる。

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{この概略は左下図}$$



右図の ① - ② から求める体積である

$$\textcircled{1} = \int_0^{\alpha} \pi y^2 dx$$

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad \text{と置換して} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \alpha \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{5} \end{array}$$

$$\textcircled{1} = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{5}} \left\{ \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\cos 4\theta + \cos 8\theta) \right\} d\theta \quad [\text{問題2より}]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta - \frac{1}{16} \sin 8\theta \right]_0^{\theta_0} \quad [\theta_0 = \frac{\pi}{5} \text{ だけ}]$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \frac{1}{8} \sin 4\theta_0 - \frac{1}{16} \sin 8\theta_0 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \frac{1}{8} \sin \theta_0 + \frac{1}{16} \sin 2\theta_0 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{9}{16} \sin 2\theta_0 - \frac{1}{8} \times \frac{\sin 2\theta_0}{2 \cos \theta_0} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{9}{16} \alpha - \frac{1}{8} \times \frac{\alpha}{2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \right)$$

$$\alpha = \sin 2\theta_0 \quad \cos \theta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\textcircled{2} = \pi \alpha \times \frac{10-\sqrt{5}}{16}$$

$$\textcircled{2} = \pi \times \alpha^2 \times \alpha \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} \alpha^3$$

$$= \frac{\pi}{3} \alpha^2 \cdot \alpha$$

$$= \frac{\pi}{3} \times \frac{5+\sqrt{5}}{8} \times \alpha$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{24} \pi \alpha$$

よって求める体積 V は

$$V = \textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$= \left(\frac{10-\sqrt{5}}{16} - \frac{5+\sqrt{5}}{24} \right) \pi \alpha$$

$$= \frac{20-5\sqrt{5}}{48} \pi \alpha$$

$$\therefore \frac{V}{\alpha} = \frac{20-5\sqrt{5}}{48} \pi$$

1167 h1