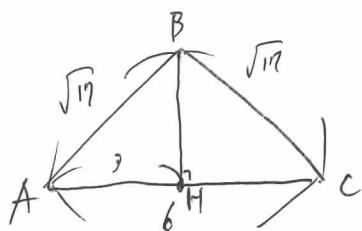
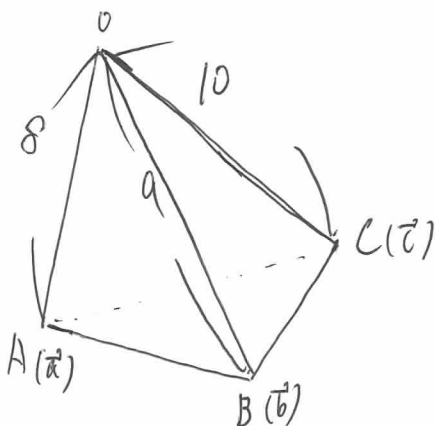


第2問 四面体 OABC は辺の長さが $OA=8$ 、 $OB=9$ 、 $OC=10$ であり、 $\vec{OA}=\vec{a}$ 、 $\vec{OB}=\vec{b}$ 、 $\vec{OC}=\vec{c}$ とおくと、内積の値はそれぞれ $\vec{a}\cdot\vec{b}=64$ 、 $\vec{b}\cdot\vec{c}=82$ 、 $\vec{c}\cdot\vec{a}=64$ を満たす。

また、3点 A、B、C を通る平面と点 O で接し、辺 OA、OB、OC とそれぞれ点 P、Q、R で接する球を S とし、S の中心を E とする。このとき、次の問い (問1~4) に答えよ。

問1 辺の長さは $AB=\sqrt{\text{アイ}}$ 、 $AC=\text{ウ}$ である。また、四面体 OABC の体積は $\text{エオ}\sqrt{\text{カ}}$ である。



$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{b}-\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 9^2 - 2 \times 64 + 8^2 \\ &= 17 \end{aligned} \quad \therefore AB = |\vec{AB}| = \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AC}|^2 &= |\vec{c}-\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 10^2 - 2 \times 64 + 8^2 \\ &= 36 \end{aligned} \quad \therefore AC = |\vec{AC}| = \frac{6}{1}$$

$$\begin{aligned} |\vec{BC}|^2 &= |\vec{c}-\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 \\ &= 10^2 - 2 \times 82 + 9^2 \\ &= 17 \end{aligned} \quad \therefore BC = |\vec{BC}| = \sqrt{17}$$

よって $\triangle ABC$ は $BA=BC$ の二等辺三角形 (左図参照)

B から AC に垂線を下す。その足を H とする

$$AH=3 \text{ より 三平方の定理より } BH = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 3^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle BAC \text{ の面積は } 6 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{また } \triangle OAB \text{ において } OB^2 = OA^2 + AB^2 \text{ がい成り立つ (} 9^2 = 8^2 + (\sqrt{17})^2 \text{)}$$

$$\angle OAB = 90^\circ$$

$$\triangle OAC \text{ において } OC^2 = OA^2 + AC^2 \text{ が成り立つ (} 10^2 = 8^2 + 6^2 \text{)}$$

$$\angle OAC = 90^\circ$$

よって OA と $\triangle ABC$ は

垂直に交わり

四面体 OABC の高は $\triangle ABC$ と

垂直。高は $OA=8$ とする

よって 体積は

$$6\sqrt{2} \times 8 \times \frac{1}{3} = 16\sqrt{2}$$

問2 $\vec{x}$ は $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ のそれぞれとなす角がともに θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) であり、 $|\vec{x}| = 1$ である。

このとき、実数 p 、 q 、 r を用いて $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とおくと、 $\frac{p}{\cos \theta} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ 、 $\frac{p}{r} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{x} &= |\vec{a}| |\vec{x}| \cos \theta \\ &= 8 \times 1 \times \cos \theta \\ &= 8 \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又 } \vec{a} \cdot \vec{x} &= \vec{a} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \\ &= p|\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} + r\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= p \cdot 8^2 + q \cdot 64 + r \cdot 64 \\ &= 64p + 64q + 64r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 8 \cos \theta &= 64p + 64q + 64r \\ \cos \theta &= 8p + 8q + 8r \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{x} &= 9 \cos \theta \\ \vec{b} \cdot \vec{x} &= 64p + 81q + 82r\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array} \right. \quad \begin{aligned} 9 \cos \theta &= 64p + 81q + 82r \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{x} &= 10 \cos \theta \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 64p + 82q + 100r\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{③} \end{array} \right. \quad \begin{aligned} 10 \cos \theta &= 64p + 82q + 100r \\ 5 \cos \theta &= 32p + 41q + 50r \quad \text{--- ③} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{②} - \text{①} \times 2 \text{ ②} \quad & -\cos \theta = -q - 18r \\ & \therefore q + 18r = \cos \theta \quad \text{--- ④}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{③} \times 8 - \text{②} \text{ ③} \quad & -\cos \theta = -17q - 18r \\ & \therefore 17q + 18r = \cos \theta \quad \text{--- ⑤}\end{aligned}$$

$$\text{⑤} - \text{④} \text{ ③} \quad 16q = 0 \quad \therefore q = 0 \quad r = \frac{\cos \theta}{18} \quad \text{--- ⑥}$$

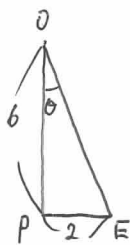
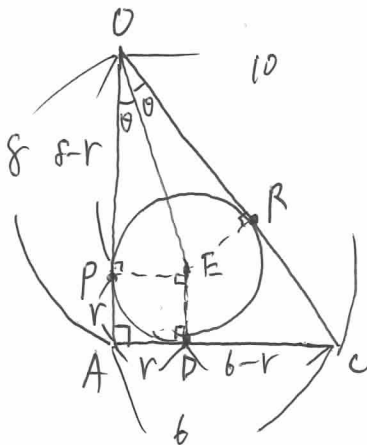
$$\begin{aligned}\text{①} \text{ に } q=0 \text{ を代入} \quad & \cos \theta = 8p + \frac{4 \cos \theta}{9} \\ & 8p = \frac{5 \cos \theta}{9} \quad \therefore \frac{p}{\cos \theta} = \frac{5}{72} \quad \text{--- ⑦}\end{aligned}$$

$$\text{② ③} \text{ ③} \quad p = \frac{5 \cos \theta}{72} \text{ を } \text{⑥} \text{ に代入して}$$

$$\frac{p}{r} = \frac{\frac{5 \cos \theta}{72}}{\frac{\cos \theta}{18}} = \frac{5}{4}$$

問3 Sの半径は $\frac{1}{2}$ であり、 $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ と表される。

問27 $g=0$ のときは 下図のようにする。



59 半径 r 之比

$$AP = AD = r$$

$$OP = 8 - r, \quad CD = 6 - r$$

उदा०. २. $OP = OR$, $CD = CR$ र"व"य

$$OC = OR + CR$$

$$A'S \quad 10 = 8 - r + 6 - r$$

$$2r = 4$$

$$\therefore r = 2$$

$r=2$ のとき左図から三平方の定理より

$$OE = \sqrt{6^2 + 2^2}$$

$$= 2\sqrt{10} \quad \therefore \cos \theta = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Prob 29 (b) (i) $p = \frac{5}{12} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{48}$

$$r = \frac{1}{18} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{60}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{\sqrt{10}}{48} \vec{a} + \frac{\sqrt{10}}{60} \vec{c}$$

$$|\vec{OE}| = 2\sqrt{10} \quad |\vec{r}| = 1 \text{ 任意の値}$$

$$\overrightarrow{OE} = 2\sqrt{10} \vec{x}$$

$$= 2\sqrt{10} \left(\frac{\sqrt{10}}{48} \vec{a} + \frac{\sqrt{10}}{60} \vec{c} \right)$$

$$= \frac{5}{12} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

7. 4. 7. 4

問4 $\vec{OQ} = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \vec{b}$ である。また、四面体 OABC の体積を V_1 、四面体 OPQR の体積を

V_2 とすると、 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

$$OP = OQ = OR \text{ であり } OQ = 6$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= 9 \text{ より } \vec{OQ} = \frac{6}{9} \vec{b} \\ &= \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

V_1 の底面積を $\triangle OAC$ 。

V_2 の底面積を $\triangle OPR$ とすると 問題3の結果より

$$\begin{aligned} \triangle OAC : \triangle OPR &= 8 \times 10 : 6 \times 6 \\ &= 1 : \frac{9}{20} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{高さの比は } |\vec{OB}| : |\vec{OQ}| \text{ より } 1 : \frac{2}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} V_1 : V_2 &= 1 \times 1 : \frac{1}{20} \times \frac{2}{3} \\ &= 1 : \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{V_2}{V_1} &= \frac{3}{10} \\ &\text{トナニ} \end{aligned}$$