

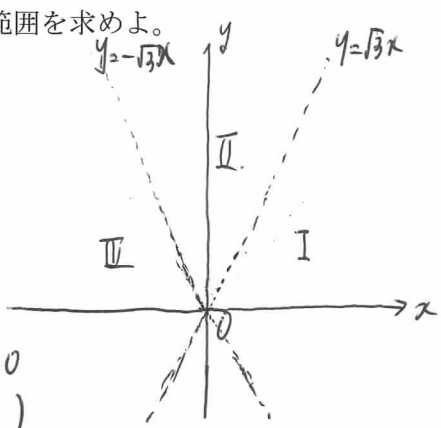
【3】 C を方程式 $x^2 + y^2 - |\sqrt{3}x + y| - |\sqrt{3}x - y| = 0$ ($y > 0$) の表す曲線とし、 b を C と直線 $y = b$ が 6 個の共有点をもつような定数とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。また、 b のとり得る値の範囲を求めよ。

左図より $y > 0$ かつ I) $\sqrt{3}x + y > 0, \sqrt{3}x - y > 0$

$$\text{II) } \sqrt{3}x + y > 0, \sqrt{3}x - y < 0$$

$$\text{III) } \sqrt{3}x + y < 0, \sqrt{3}x - y < 0$$

で $\frac{y}{x}$ は良い (つまり $y > 0$ かつ IV) $\sqrt{3}x + y < 0, \sqrt{3}x - y > 0$
 $\frac{y}{x}$ は悪い) 

$$\text{I) } x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}x + y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 3$$

$$\text{II) } x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y + \sqrt{3}x - y = 0$$

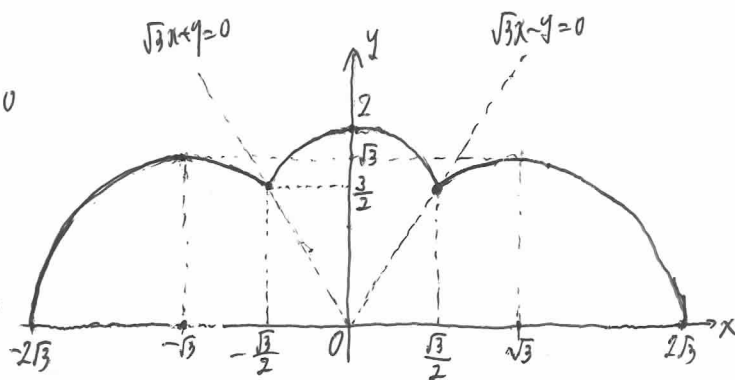
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$\text{III) } x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}x - y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x = 0$$

$$(x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 3$$



以上を 図示して 右上図

図より b のとり得る値の範囲は

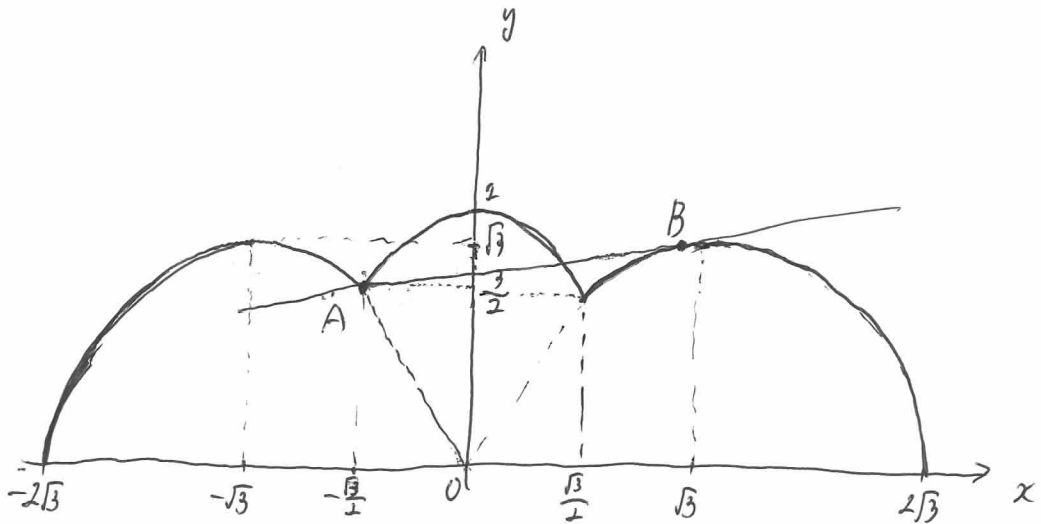
$$\underline{\underline{\frac{3}{2} < b < \sqrt{3}}}$$

(2) 曲線 C と直線 $y = ax + b$ が 6 個の共有点をもつような定数 a のとり得る値の範囲を $f(b) < a < g(b)$ とおく。 b が (1) で求めた範囲を動くとき、 $g(b) - f(b)$ が最大値をとる b の値を求めよ。

737a 対称性より $|f(b)| = |g(b)|$

つまり $g(b) = -f(b)$

とすることが出来る。 よって $g(b)$ を最大にする b を求めればよい。



$A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ を通り $\Gamma: (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$ で接する直線を考える (図参照)
(接点を B とおく)

この直線の方程式を求める。点 A を通り a の傾きを m とすると

$$y - \frac{3}{2} = m(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{とおく}$$

$$2y - 3 = 2mx + \sqrt{3}m \quad \text{①}$$

$$2mx - 2y + \sqrt{3}m + 3 = 0$$

点 $(\sqrt{3}, 0)$ との距離が $\sqrt{3}$ より

$$\frac{|2\sqrt{3}m + \sqrt{3}m + 3|}{\sqrt{(2m)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{3}$$

$$|3\sqrt{3}m + 3| = \sqrt{3} \sqrt{4m^2 + 4}$$

両辺2乗して

$$27m^2 + 18\sqrt{3}m + 9 = 12m^2 + 12$$

$$15m^2 + 18\sqrt{3}m - 3 = 0$$

$$5m^2 + 6\sqrt{3}m - 1 = 0$$

$$m = \frac{-3\sqrt{3} \pm \sqrt{27+5}}{5}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} \pm 4\sqrt{2}}{5}$$

② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

$$m > 0 \text{ かつ } m = \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{5}, \text{ ① に代入して}$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{5} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{5}x + \frac{-9 + 4\sqrt{6}}{10} + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{5}x + \frac{6 + 4\sqrt{6}}{10}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{5}x + \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5}$$

$$\frac{3}{2} < \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5} < \sqrt{3} \text{ かつ } b = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5} \text{ となる}$$

$$y = ax + b \text{ かつ } b \text{ の値は } \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5} \text{ より小さいことがわかる}$$

$$g(b) \text{ の値は小さいことがわかる (直線は } A \text{ を通らず } (x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 3 \text{ 上の点と交わる)}$$

$$\text{又 } b \text{ の値は } \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5} \text{ より大きいことがわかる}$$

$$\text{やはり } g(b) \text{ の値は小さいことがわかる (直線は } B \text{ を通らず点 } A \text{ より上側を通る)}$$

$$\text{よって求める } b \text{ の値は } \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5}$$