

【2】 C は直線 $x=1$ を軸とする上に凸な放物線であり、原点 O と通るとする。 C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ の2個の共有点のうち O 以外のものを $A(a, 2a\sqrt{a})$ とおく。 C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ で囲まれた部分の面積を S とし、 C と x 軸で囲まれた部分の面積を T とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) 放物線 C の頂点の y 座標を a を用いて表せ。また、 a のとり得る値の範囲を求めよ。

C は直線 $x=1$ を軸とし、原点を通り、放物線の対称性より
 x 軸と $x=2$ で交わる。つまり C は

$$y = bx(x-2) \quad (b < 0) \quad \text{--- ①}$$

と表す。①より $A(a, 2a\sqrt{a})$ を通るので

$$2a\sqrt{a} = ba(a-2)$$

$a \neq 0$ より両辺 a で割ると

$$2\sqrt{a} = b(a-2)$$

$a=2$ のとき $2\sqrt{2} = b \times 0$ より不適

よって $a \neq 2$ であるから

$$b = \frac{2\sqrt{a}}{a-2} \quad \text{--- ②}$$

①に代入して $y = \frac{2\sqrt{a}}{a-2} x(x-2)$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{a-2} (x^2 - 2x + 1 - 1)$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{a-2} \{ (x-1)^2 - 1 \}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{a-2} (x-1)^2 - \frac{2\sqrt{a}}{a-2} \quad \text{よって頂点の } y \text{ 座標は } -\frac{2\sqrt{a}}{a-2}$$

又 $b < 0$ であるから ②より $\frac{2\sqrt{a}}{a-2} < 0$

両辺 $(a-2)^2$ を倍して

$$2\sqrt{a}(a-2) < 0$$

$$\therefore \underline{0 < a < 2}$$

(2) S を a を用いて表せ。

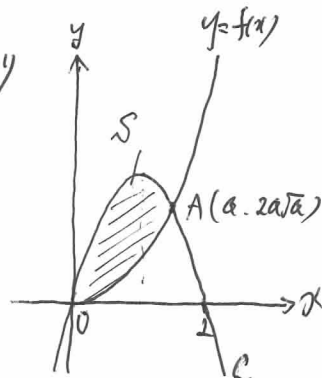
(3) $2S = T$ となる a の値がただ 1 つ存在することを証明せよ。

$$(2) f(x) = 2x\sqrt{x} = 2x^{\frac{3}{2}} \quad (x > 0) \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} > 0$$

よ $y = f(x)$ は 定義域 $x \geq 0$ において、原点を通り
単調増加で下に凸の曲線である。



$$\therefore S = \int_0^a \left\{ \frac{2\sqrt{a}}{a-2} (x^2 - 2x) - 2^{\frac{3}{2}} \right\} dx$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{a}}{a-2} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{2\sqrt{a}(a^3 + 3a^2)}{15(2-a)}$$

$$(3) T = \int_0^2 \frac{2\sqrt{a}}{a-2} (x^2 - 2x) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{a-2} \int_0^2 x(x-2) dx \quad \left[\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{a-2} \times \left(-\frac{1}{6} \times 2^3 \right)$$

$$= \frac{8\sqrt{a}}{3(2-a)}$$

つまり ③を解く a は
ただ 1 つ存在する

$2S = T$ とおくと

$$\frac{4\sqrt{a}(a^3 + 3a^2)}{15(2-a)} = \frac{8\sqrt{a}}{3(2-a)} \quad \therefore a^3 + 3a^2 - 10 = 0 \quad \text{--- ③}$$

$g(x) = x^3 + 3x^2 - 10$ ($0 \leq x \leq 2$) とおく (③) $0 < a < 2$ より $0 \leq x \leq 2$ で調べる

$g'(x) = 3x^2 + 6x > 0$ ($\because 0 \leq x \leq 2$) より $g(x)$ は増加関数 $g(0) = -10$, $g(2) = 10$

よって中間値の定理より $g(x) = 0$ となる x は $0 < x < 2$ にただ 1 つ存在する