

【1】 次の各文の にあてはまる答を求めよ。

(1) a, b を定数とする. 整式 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 1 であるとき, a の値は (ア), b の値は (イ) である。

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2-2x+1 \overline{) x^3-4x^2+ax+b} \\ \underline{-(x^3-2x^2+x)} \\ -2x^2+(a-1)x+b \\ \underline{-(-2x^2+4x-2)} \\ (a-5)x+b+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{余りが 1 であるから} \\ \left\{ \begin{array}{l} a-5=0 \\ b+2=1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\therefore a=5, b=-1$$

(ア). (イ)

(2) $x = \sin \theta + \cos \theta$, $y = \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + 6 \sin \theta \cos \theta - 9(\sin \theta + \cos \theta)$ とおく。 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ のとき, x のとり得る値の範囲は (ウ) であり, y を x を用いて表すと $y =$ (エ) となる。さらにこのとき, y のとり得る値の範囲は (オ) である。

$$x = \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であるから } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

より

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

加法定理の逆

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \text{ であるから } \frac{\pi}{2} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} \text{ より}$$

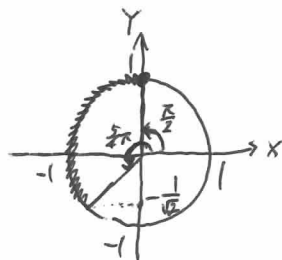
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ (右図参照)}$$

両辺 $\sqrt{2}$ 倍して

$$-1 \leq \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

(ウ)



$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{より } \sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$\therefore y = \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + 6 \sin \theta \cos \theta - 9(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + 6 \sin \theta \cos \theta - 9(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 + 6 \sin \theta \cos \theta - 9(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= x^3 + 6 \times \frac{x^2 - 1}{2} - 9x$$

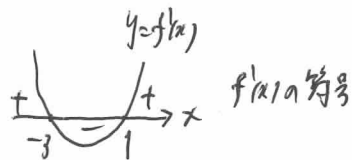
$$= x^3 + 3x^2 - 9x - 3$$

(エ)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$$

∴

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x^2 + 2x - 3) \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 1$$

∴ $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で増減表を書くと次のようになる

x	-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 3 + 9 - 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{極小値 } f(1) &= 1 + 3 - 9 - 3 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 2\sqrt{2} + 6 - 9\sqrt{2} - 3 \\ &= 3 - 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$-8 < 3 - 7\sqrt{2} < 8$$

$$\begin{aligned} \text{∴ } & -8 \leq y \leq 8 \\ & \text{-----} \\ & \text{(才)} \end{aligned}$$

(3) 3点 $A(-3, 6)$, $B(5, 0)$, $C(4, 7)$ を通る円の中心の座標は $\boxed{\text{(カ)}}$ であり、半径は $\boxed{\text{(キ)}}$ である。この円と直線 $y = 2x + k$ の共有点の個数が2個であるとき、定数 k のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{(ク)}}$ である。

3点 A, B, C を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \quad \text{--- ①}$$

とすると

$$A(-3, 6) \text{ を通るから } 9 + 36 - 3l + 6m + n = 0 \quad \therefore -3l + 6m + n = -45 \quad \text{--- ②}$$

$$B(5, 0) \text{ を通るから } 25 + 0 + 5l + 0m + n = 0 \quad \therefore 5l + n = -25 \quad \text{--- ③}$$

$$C(4, 7) \text{ を通るから } 16 + 49 + 4l + 7m + n = 0 \quad \therefore 4l + 7m + n = -65 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{② ③ ④ を連立して解くと } l = -2, m = -6, n = -15$$

① に代入して

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\therefore \text{中心 } (1, 3), \text{ 半径 } 5$$

(カ) (キ)

$$\text{円 } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ と直線 } 2x - y + k = 0$$

の共有点の個数が2個

$\Downarrow$

点 $(1, 3)$ と直線 $2x - y + k = 0$ の距離が5未満

$$\therefore \frac{|2 \times 1 - 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 5$$

$$|k - 1| < 5\sqrt{5}$$

$$-5\sqrt{5} < k - 1 < 5\sqrt{5}$$

$$1 - 5\sqrt{5} < k < 1 + 5\sqrt{5}$$

(ク)

(4) ボタンを押すたびに「あたり」か「はずれ」のいずれか一方だけを画面に表示する機械があり、この機械は以下の規則に従って動く。

規則1. 1回目にボタンを押して「あたり」が表示される確率は $\frac{2}{3}$ である。

規則2. ボタンを押して「あたり」が表示されたとき、次にボタンを押して「あたり」が表示される確率は $\frac{2}{3}$ である。また、ボタンを押して「はずれ」が表示されたとき、次にボタンを押して「あたり」が表示される確率は $\frac{1}{6}$ である。

各自然数 n に対して、 n 回目にボタンを押して「あたり」が表示される確率を a_n とする。このとき、 $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \boxed{\text{(ケ)}}$, $a_3 = \boxed{\text{(コ)}}$ であり、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{(サ)}}$ である。

2回目にボタンを押して「あたり」が表示されるのは

②② または ①②②

①② ②② ... あたり

②② ... はずれ

より

$$a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

(ケ)

3回目にボタンを押して「あたり」が表示されるのは

②②② または ②②① または ②①② または ①②②

より

$$a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

(コ)

a_n と a_{n+1} の関係式 (漸化式) を作ると

$$\begin{array}{l} a_n \xrightarrow{\frac{2}{3}} a_{n+1} \\ 1-a_n \xrightarrow{\frac{1}{6}} a_{n+1} \end{array}$$

左表より

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}(1-a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6} \quad [\alpha \text{ は定数と仮定して } \alpha = \frac{1}{3}]$$

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{3})$$

よって数列 $\{a_n - \frac{1}{3}\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列より

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ a_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

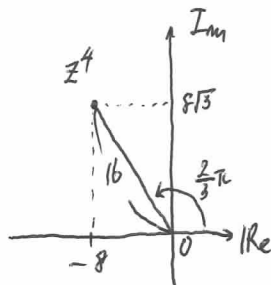
(サ)

(5) 実部が正で虚部が負である複素数 z が $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ を満たすとする。このとき、 z^4 を極形式で表すと $z^4 = \boxed{(\text{シ})}$ であり、 z の値は $\boxed{(\text{ス})}$ である。2つの複素数 $0, z$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ O, A とし、線分 OA の中点を表す複素数を w とおくと、 $w^{2017} + (\bar{w})^{2017}$ の値は $\boxed{(\text{セ})}$ である。また、 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ の値は $\boxed{(\text{ソ})}$ である。

右図より

$$z^4 = 16 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \quad \text{--- ①}$$

(シ)



$$\therefore z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0)$$

$$\text{よって } z \text{ の実部が正、虚部が負より } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \quad \text{--- ②}$$

$$\text{よって } z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

より ①と比較して

$$r = 2, \quad 4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{n}{2}\pi$$

$$\text{②に注意すると } n=3 \text{ とき } \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore z = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \underline{\underline{-1 - \sqrt{3}i}} \quad \text{--- (ス)}$$

$$w = \frac{z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore w^{2017} = \cos \left(2017 \times \frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(2017 \times \frac{5}{3}\pi \right)$$

$$= \cos \left(1680 \times 2\pi + \frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(1680 \times 2\pi + \frac{5}{3}\pi \right) \quad \text{--- (注) } 2017 \times \frac{5}{3}\pi$$

$$= \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{よって } (\bar{w})^{2017} = \overline{w^{2017}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって

$$w^{2017} + (\bar{w})^{2017} = \underline{\underline{1}} \quad \text{--- (セ)}$$

$$= (2016 + 1) \times \frac{5}{3}\pi$$

$$= 2016 \times \frac{5}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi$$

$$= 672 \times 5\pi + \frac{5}{3}\pi$$

$$= 2 \times 336 \times 5\pi + \frac{5}{3}\pi$$

$$= 1680 \times 2\pi + \frac{5}{3}\pi$$

求 $z \neq 1$ 的

$$\underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}$$

$$= \frac{z^5 - 1}{z - 1} + z^4 \quad \left. \vphantom{\frac{z^5 - 1}{z - 1}} \right\} \text{(等比数列求和公式)}$$

$$= \frac{-8 + 8\sqrt{3}i - 1}{1 - \sqrt{3}i - 1} - 8 + 8\sqrt{3}i$$

$$= \frac{-9 + 8\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} - 8 + 8\sqrt{3}i$$

$$= \frac{-9i + 8\sqrt{3}i^2}{-\sqrt{3}i^2} - 8 + 8\sqrt{3}i$$

$$= \frac{-9i - 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 8 + 8\sqrt{3}i$$

$$= -3\sqrt{3}i - 8 - 8 + 8\sqrt{3}i$$

$$= \frac{-16 + 5\sqrt{3}i}{(Y)}$$